ТЧ-шные теоремы.

Малая теорема Ферма. Если число p — простое и НОД$(a, p) = 1$, то $a^{p-1} \equiv_p 1$.
Функция Эйлера. $\varphi(n)$ — количество натуральных чисел от 1 до n, взаимно простых с n.
Теорема Эйлера. Если число n — произвольное натуральное число и НОД$(a, n) = 1$, то $a^{\varphi(n)} \equiv_n 1$.
Теорема Вильсона. Если число p — простое, то $(p-1)! \equiv_p -1$.

Учимся говорить.

1. Число $p > 5$ — простое. Докажите, что число, составленное из $p - 1$ единицы, делится на p.

2. Число n — нечетно. Докажите, что число $2^{n!} - 1$ делится на n.

3. Число p — простое. Докажите, что число $(2p-1)! - p$ делится на p^2.

4. **a)** Найдите формулу для $\varphi(p^\alpha)$, где p — простое число, α — натуральное число.

b) Найдите формулу для $\varphi(n)$, если известно разложение n на простые множители, а также степени вхождения простых множителей в n.

5. Сколькими способами можно покрасить карусель из p вагончиков (число p — простое), если одинаковыми считаются раскраски, совмещающиеся поворотом. Выведите отсюда малую теорему Ферма.

6. Докажите, что для любого целого числа a

a) $a^5 - a$ делится на 30;

b) $a^{17} - a$ делится на 510;

c) $a^{11} - a$ делится на 66.

7. Докажите что в любой арифметической прогрессии $a, a + d, a + 2d, \ldots, a + nd, \ldots$, составленной из натуральных чисел, есть бесконечно много членов, в разложении которых на простые множители входят в точности одни и те же простые числа.

8. С помощью индукции по a докажите следующее утверждение, эквивалентное малой теореме Ферма: если p — простое число, то для любого натурального a справедливо сравнение $a^p \equiv_p a$.

9. Докажите, что ни при каком целом k число $k^2 + k + 1$ не делится на 101.

Учимся писать.

10. Для каких натуральных n число $(n-1)!$ делится на n?

11. При каких натуральных n для каждого натурального $k \geqslant n$ существет натуральное число с суммой цифр равной k, которое делится на n?