Бароны. Разбор письменного задания.

3. В двудольном грфае степени всех вершин равны k. Докажите, что ребра графа можно покрасить в k цветов так, чтобы два ребра одного цвета не имели общих концов.

Решение: Докажем утверждение задачи индукцией по k.

База: $k = 1$. Ни у каких двух ребер нет общего конца, все ребра можно покрасить в один цвет.

Переход: пусть утверждение задачи верно для $k - 1$, докажем его для k. Сумма степеней вершин в одной доле равно сумме степеней в другой, все степени одинаковые $\Rightarrow$ в долях поровну вершин.

Утверждение 1. *В графе существует совершенное паросочетание (т. е. такое паросочетание, что каждая вершина графа является концом одного из ребер).*

Доказательство. Найдем с помощью леммы Холла такое паросочетание, что каждая вершина первой доли является концом одного из его ребер. Оно будет искомым, так как в долях поровну вершин.

Достаточно проверить условие леммы Холла. Возьмем подмножество из t вершин первой доли. Допустим, что они связаны в совокупности с $s < t$ вершинами второй доли. Выкинем из графа все вершины, кроме этих s и t. Остался двудольный граф, в одной доле t вершин степени ровно k каждая, в другой доле s вершин степени не более, чем k каждая. Сумма степеней в первой доле равна tk, сумма степеней во второй не больше sk. Но $t > s \Rightarrow tk > sk \Rightarrow$ сумма степеней в первой доле больше, чем во второй. Противоречие. Значит, условие леммы Холла выполнено и паросочетание найдется. $\square$

Выберем совершенное паросочетание и покрасим все его ребра в первый цвет. Выкинем ребра этого паросочетания. Останется двудольный граф, степени всех его вершин равны $k - 1$. По предположению индукции его ребра можно правильным образом покрасить в цвета со 2-го по k-й. Значит, ребра исходного графа можно правильным образом покрасить в k цветов, ЧТД.