Графы. Занятие третье. Разбор письменного задания.

9. На плоскости проведено n прямых. Каждая пересекается ровно с 55 другими. Найдите n. (Укажите все возможности.)

Все прямые разбиваются на несколько групп: прямые в одной группе параллельны между собой, а прямые из разных групп – не параллельны. Всего прямых n, каждая пересекает 55 прямых $\Rightarrow$ каждая прямая не пересекает $55-n$ прямых $\Rightarrow$ в каждом классе $n-55$ прямых. Пусть к всего k групп. Тогда $n=(n-55)k \Rightarrow 55k=n(k-1) \Rightarrow 55k \vdots k-1$. Но k и $k-1$ взаимно просты $\Rightarrow 55 \vdots k-1$. $k-1$ натурально, у числа 55 есть четыре натуральных делителя: 1, 5, 11, 55 $\Rightarrow k-1=1$, 5, 11 или 55 $\Rightarrow k=2$, 6, 12 или 56. Но $55k=n(k-1) \Rightarrow n=55k/(k-1) \Rightarrow n=110$, 66, 60 или 56.

Покажем, что все четыре варианта возможны. Действительно, возьмём на плоскости k групп параллельных прямых по $55/(k-1)$ прямой в каждой группе при $k=2$, 6, 12, 56. Тогда всего будет взята $55k/(k-1)$ прямая, это равно как раз 110, 66, 60, 56 при $k=2$, 6, 12, 56 соответственно. В каждом из этих случаев любая прямая пересекает $55k(k-1)-55/(k-1)=55$ других прямых, что и требовалось.

Комментарий: в некоторых работах получен верный ответ, доказано, что никаких вариантов, кроме этих четырех, не может быть, но не написано, почему эти четыре возможны. Однако об этом надо писать. Антипример: в одной из работ в ответ, помимо четырех правильных, выданы и другие варианты. Разумеется, автор не доказал, почему для всех найденные им ответов существует набор прямых.

10. Дан клетчатый квадрат 20×20. M его клеток покрашены в черный цвет, остальные — в белый. Будем рассматривать четверки клеток, центры которых являются вершинами прямоугольника со сторонами, параллельными сторонам квадрата. Если в какой-то момент три клетки из одной четверки окрашены в черный цвет, то через минуту и четвертая клетка окрашивается в черный. При каком наименьшем M может оказаться так, что весь квадрат через некоторое время станет черным?

Ответ: при $M=39$

Пример: пусть исходно покрашены все клетки одного столбца и одной строки. Покрашено $20+20-1=39$ клеток. Через минуту все клетки станут черными.

Оценка: Рассмотрим двудольный граф с 20 вершинами в каждой доле: вершины первой доли соответствуют строкам, вершины второй доли – столбцам. Соединяем строку и столбец ребром, если клетка на их пересечении покрашена в черный. Допустим, что исходно в графе проведено $M<39$ ребер. Вершин 40 $\Rightarrow$ граф несвязен.

Что происходит, когда мы перекрашиваем белую клетку в черный? Перекрашиваемая клетка а содержится в четверке клеток, образующих прямоугольник. Эти четыре клетки содержатся в двух строках и двух столбцах. В графе этим строкам и столбцам соответствуют четыре вершины, по две из каждой доли. Три из четырех возможных ребер между ними уже проведены (эти рёбра – это три черные клетки из четверки клеток), поэтому все четыре вершины лежат в одной компоненте связности. Перекрашивая клетку, мы проводим четвертое ребро. Новое ребро соединяет вершины из одной компоненты $\Rightarrow$ число компонент связности не изменилось.

Исходно компонент больше одной $\Rightarrow$ всегда будет больше одной компоненты $\Rightarrow$ граф всегда будет несвязен. Но если все клетки квадрата черные, то имеем полный двудольный граф, а он связен. Противоречие.