Графы. Занятие второе. Разбор письменного задания.

11. Город имеет форму квадрата 5×5. Стороны квадратов разбиения — это улицы города. Какую наименьшую длину может иметь маршрут, если нужно пройти по каждой улице этого города и вернуться в исходное место? (По каждой улице можно проходить любое число раз.)

Ответ: 68.

Оценка: Возьмем граф: вершины соответствуют 36 вершинам квадратиков разбиения, ребра соответствуют улицам (т. е. сторонам квадратиков). Возьмем цикл, проходящий хотя бы раз по всем ребрам. В графе ровно 16 вершин нечетной степени: это вершины, лежащие границе квадрата, но не в углах. Из каждой вершины нечетной степени выходит хотя бы одно ребро, которое пройдено хотя бы дважды. Следовательно, хотя бы $16/2 = 8$ ребер пройдено хотя бы дважды. Всего в графе $5 \cdot 6 + 5 \cdot 6 = 60$ ребер $\Rightarrow$ длина цикла не меньше $60 + 8 = 68$.

Пример: Добавим в наш граф еще 8 ребер так, чтобы все вершины степени 3 стали иметь степень 4. Для этого продублируем по два ребра на каждой стороне квадрата (то есть делаем 8 ребер кратности два). Теперь в графе 68 ребер, и в нем есть эйлеров цикл, так как степени всех вершин четны. Этот цикл и дает нужный пример.

12. При каких n можно в вершинах n-угольника расставить натуральные числа так, чтобы на каждой стороне одно число делилось на другое, а для всех остальных пар чисел такого не было?

Ответ: при всех четных $n \geq 4$ и при $n = 3$.

Примеры:

$n = 3$. Поставим в вершины треугольника три одинаковых числа.

$n = 4$. Поставим в противоположные вершины квадрата 2 и 3, а в оставшиеся $3 \cdot 2^2$ и $2 \cdot 3^3$.

$n = 2k, k > 2$. Поставим в половину вершин через одно k различных простых чисел. В оставшиеся вершины поставим произведение двух простых чисел, стоящих в соседних вершинах.

Если взять два числа на концах одной стороны, то одно на другое делится.

Возьмем два числа из не соседних вершин. Если они оба простые, то ни одно из них на другое не делится, так как мы расставляли различные простые числа. Если они оба – произведение двух простых, то они различны (так как $k > 2$). Значит, ни одно из них не делится на другое. Если одно из них – простое, а другое – произведение двух простых, то первое, очевидно, не делится на второе, а второе не делится на первое, так как числа не соседние.

Значит, пример работает.

Пусть теперь $n > 3$ нечётно. Допустим, что можно расставить числа, как требуется в условии. На каждой стороне число в одном конце делится на число в другом. Поставим на каждой стороне поставим стрелку, идущую от числа, которое делится к числу, на которое оно делится. Если два числа одинаковы, поставим стрелку в произвольном направлении.

Утверждение 1. *Стрелки на соседних сторонах идут в противоположных направлениях.*

Доказательство. Пусть не так, есть две соседние стороны, и стрелки на них идут обе в направлении по часовой. Обозначим числа на концах этих сторон через , b и c; тогда $a \vdots b$, $b \vdots c \Rightarrow a \vdots c$. Но $n > 3 \Rightarrow b$ и c не соединены стороной многоугольника. Противоречие. □

В силу утверждения на сторонах чередуются стрелки, идущие по часовой и против часовой. Значит, сторон четное число. Противоречие.

Комментарий: При $n = 4$ не работает пример, построенный нами для четных $n > 4$, ведь в этом примере в одной из пар противоположных вершин квадрата стоят равные числа, а они делятся друг на друга! Также в некоторых работах случай $n = 3$ не рассматривался отдельно, а был “разобран” с помощью общего рассуждения, которым мы разобрали случай нечетного $n > 3$. В итоге получается неверный ответ. Будьте осторожны! Иногда общие рассуждения не работают в маленьких случаях.