

## Графы. Занятие второе.

### Учимся говорить.

#### Двудольный граф:

1. Между командами «СКА» и «ЦСКА» состоялся хоккейный матч. Каждый игрок «СКА» стукнулся лбом с пятью хоккеистами «ЦСКА», а каждый игрок «ЦСКА» стукнулся лбом с тремя игроками «СКА». Сколько хоккеистов могло быть на льду, если в команде не более 10 человек?
2. В государстве некоторые пары городов соединены дорогами. Известно, что не существует замкнутого маршрута с нечетным числом дорог. Докажите, что можно все города разбить на две группы так, чтобы дороги соединяли города из разных групп.
3. В концерте «Итальянцы в Кремле» участвовало  $n$  певцов, некоторые из Италии, а некоторые из России. Некоторые итальянские певцы один раз спели дуэтом с некоторыми российскими певцами. Найдите максимально возможное число спетых песен.
4. Встретились  $n$  учеников. Некоторые пары учеников пожали друг другу руки. Известно, что нет трех человек, среди которых каждый поздоровался за руку с каждым. Найдите максимально возможное число пар рукопожатий.
5. На клетчатой доске  $9 \times 9$  отмечено 18 клеток так, что на каждой вертикали и на каждой горизонтали отмечено ровно 2 клетки. Два расположения отмеченных клеток эквивалентны, если, меняя любое число раз вертикали между собой и горизонтали между собой, мы из одного расположения можем получить другое. Сколько существует неэквивалентных расположений отмеченных клеток?

#### Обход ребер:

6. Можно ли нарисовать графы, изображенные на Рис. ??, не отрывая карандаша от бумаги? Можно ли при этом в конце вернуться в ту точку, с которой начали рисование?

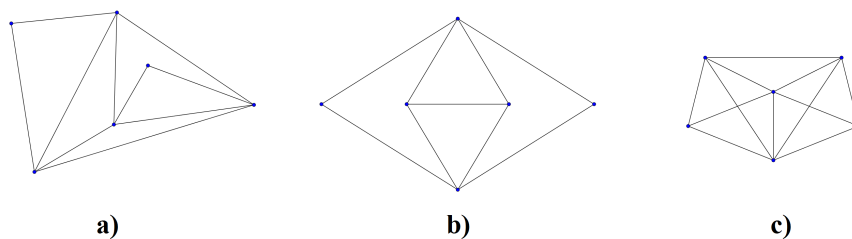


Рис. 1: к задаче 1.

7.
  - a) В государстве некоторые пары городов соединены дорогами. Путешественник смог проехать по замкнутому маршруту, проходящему через каждую дорогу ровно один раз. Докажите, что из каждого города выходит четное число дорог.
  - b) Докажите, что если из каждого города выходит четное число городов, то существует замкнутый маршрут, проходящий через каждую дорогу ровно один раз.
  - c) В каких случаях существует маршрут (не обязательно замкнутый), проходящий через каждую дорогу ровно один раз?
8. Света хочет составить из проволочек
  - a) каркас куба
  - b) каркас додекаэдра (см. рис.2 b)

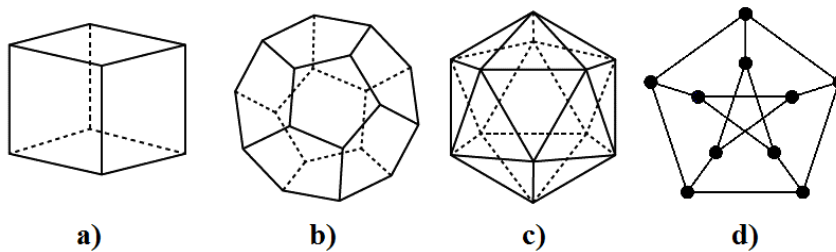


Рис. 2: к задаче 2.

Какое наименьшее число проволок ей для этого потребуется? Проволоки можно сгибать и склеивать их концы. Куски проволок не должны налезать друг на друга.

### Обход вершин:

9. Можно ли, бродя по ребрам графов на Рис. ??, обойти все вершины ровно по одному разу? А можно ли обойти все вершины по одному разу и вернуться в исходную вершину?
10. а) В государстве  $N$  городов, некоторые пары городов соединены дорогами. Известно, что каждый город соединен хотя бы с  $(N - 1)/2$  другими. Докажите, что путешественник может, передвигаясь по дорогам, посетить все города ровно по одному разу.
- б) Пусть теперь каждый город соединен хотя бы с  $N/2$  другими. Докажите, что путешественник может, передвигаясь по дорогам, посетить все города ровно по одному разу и вернуться в исходный город.

### Учимся писать.

11. Город имеет форму квадрата  $5 \times 5$ . Стороны квадратов разбиения — это улицы города. Какую наименьшую длину может иметь маршрут, если нужно пройти по каждой улице этого города и вернуться в исходное место? (По каждой улице можно проходить любое число раз.)
12. При каких  $n$  можно в вершинах  $n$ -угольника расставить натуральные числа так, чтобы на каждой стороне одно число делилось на другое, а для всех остальных пар чисел такого не было?