Герцоги. Разбор письменного задания.

14. В некотором городе есть три тупика, а на каждом перекрёстке сходятся ровно три улицы. Ко дню города улицы покрасили в три цвета так, чтобы на каждом перекрёстке сходились улицы трёх разных цветов. Докажите, что дороги, ведущие в тупики, покрашены в разные цвета.

Решение: Рассмотрим граф G, в котором вершины соответствуют городам, а ребрам соответствуют улицы. Ребра G покрашены в три цвета. В G есть три вершины степени 1 (тупики) и k вершин степени 3 (перекрестки). Сумма степеней всех вершин G четна $\Rightarrow k$ нечетно. Выкинем из графа все ребра второго и третьего цветов. Теперь каждый из k перекрестков имеет степень 1. Значит, хотя бы один из тупиков имеет степень не 0 (иначе сумма степеней всех вершин после выкидывания равна k, а k нечетно, противоречие). Значит, хотя бы из одного тупика ведет дорога цвета 1. Аналогично хотя бы из одного тупика ведет дорога цвета 2, цвета 3. Вывод: догори, ведущие в тупики, покрашены в разные цвета, ЧТД.

15. В стране 100 городов и несколько дорог. Каждая дорога соединяет два каких-то города, дороги не пересекаются. Из каждого города можно добраться до любого другого, двигаясь по дорогам. Докажите, что можно объявить несколько дорог главными так, чтобы из каждого города выходило нечётное число главных дорог.

Решение: Рассмотрим граф: вершины – города, ребра – дороги. Назовем подмножество ребер графа хорошим, если каждая вершина имеет нечетную степень по выбранным ребрам. Выделим в графе остовное дерево G. Любое хорошее подмножество ребер в дереве G является хорошим и для всего графа, поэтому достаточно найти хорошее подмножество для G.

Подвесим G за произвольную вершину a. Тогда из каждой вершины, кроме a, идет единственное ребро наверх (т. е. в вершину предыдущего яруса). Для каждой вершины нижнего яруса выберем ребро, идущее из нее вверх. После этого для каждой вершины второго снизу яруса проведем такую процедуру: если ее степень по уже выбранным ребрам была четной, то выберем ребро, идущее из вершины вверх. В противном случае оставим ребро невыбранным. Потом проделаем ту же процедуру для третьего снизу яруса и так далее последовательно для всех ярусов, кроме самого верхнего (который состоит только из вершины a). После проведения нашей процедуры над ярусом степени всех вершин яруса по выбранным ребрам становятся нечетными, и далее эти степени уже не изменяются. Поэтому в конце процедуры у всех вершин, кроме, может быть, a, будут нечетные степени по выбранным ребрам. Но сумма всех степеней по выбранным ребрам четна (по лемме о рукопожатиях), вершин в графе 100 (четное число) $\Rightarrow$ степень a тоже нечетна. То есть выбранные ребра образуют хорошее подмножество, что и требовалось.

Комментарий: Подвешиванием связного графа за вершину называется такое разбиение вершин графа на ярусы: сначала берем корень (то есть вершину, за которую подвешиваем) и определяем его в нулевой (верхний) ярус. Потом все вершины, смежные с корнем, определяем в первый ярус. Потом все вершины, смежные хотя бы с одной вершиной первого яруса, но не вошедшие в нулевой и первый ярус, относим во второй ярус, … , все вершины, смежные хотя бы с одной вершиной i-го яруса, но не вошедшие в ярусы с 0-го по i-й, относим в $i + 1$-й ярус и т. д., пока все вершины не будут определены в свой ярус.