

## Герцоги.

### Учимся говорить.

#### Степени вершин:

1. Агент иностранной разведки сообщил, что каждая из 15 бывших республик СССР заключила договор ровно с 3 другими. Докажите, что агент не прав.
2. а) Некоторые пары (из конечного числа) городов соединены двусторонними беспосадочными авиалиниями. Обязательно ли найдутся два города, из которых можно перелететь (за один раз) в одинаковое число городов?  
б) Петя заметил, что у всех его 28 одноклассников различное число друзей в этом классе. Сколько друзей у Пети?

#### Деревья:

3. В стране  $N$  есть  $n$  городов, некоторые из них соединены беспосадочными двусторонними авиалиниями. Известно, что из каждого города можно попасть в любой другой, притом по единственному маршруту.
  - а) Докажите, что найдётся город, из которого выходит ровно 1 авиалиния.
  - б) Сколько авиалиний в стране  $N$ ?
4. Известно, что из любого города можно добраться несколькими рейсами до любого другого. Докажите, что в стране действуют хотя бы  $n - 1$  авиалиния.
5. Из-за кризиса в стране  $N$  решили закрыть несколько авиалиний, оставив стране ровно  $n - 1$  авиалинию. Докажите, что можно закрыть линии так, чтобы после закрытия также можно было добраться из любого города в любой другой.
6. В стране от любого города можно с помощью авиалиний добраться до любого другого. Докажите, что можно выбрать город и закрыть из него все линии так, чтобы из любого оставшегося города можно было добраться до любого оставшегося.
7. Пусть в стране  $N$  ровно 100 городов и 199 авиалиний. Из любого города можно добраться самолетами до любого другого. Докажите, что найдётся замкнутый маршрут, при закрытии всех авиалиний которого из любого города по-прежнему можно будет добраться до любого другого.

#### Полный граф + Связность:

8. На батарее живёт семья из нескольких котиков. Каждую ночь ровно трое из них отправляются в аптеку за валерьянкой. Всего в семье
  - а) 10 котиков;
  - б) 7 котиков;
  - в) 11 котиков.

Может ли так получиться, что в некоторый момент времени каждый котик побывал на складе с каждым ровно по одному разу?

9. Среди  $n$  рыцарей каждые двое — либо друзья, либо враги. У каждого из рыцарей ровно шесть врагов, причём враги его друзей являются его врагами. При каких  $n$  такое возможно?
10. В государстве некоторые пары городов соединены дорогами. Известно, что каждый город соединен хотя бы с половиной из остальных городов. Докажите, что путешественник может из любого города добраться по дорогам до любого другого.

11. В Тридевятом царстве лишь один вид транспорта — ковер-самолет. Из столицы выходит 21 ковер-линия, из города Дальний — одна, а из всех остальных городов — по 20. Докажите, что из столицы можно долететь в Дальний (возможно, с пересадками).
12. В группе из нескольких человек некоторые люди знакомы друг с другом, а некоторые — нет. Каждый вечер один из них устраивает ужин для всех своих знакомых и знакомит их друг с другом. После того как каждый человек устроил хотя бы один ужин, оказалось, что какие-то два человека все еще не знакомы. Докажите, что на следующем ужине им познакомиться тоже не удастся.
13. В стране 15 городов, некоторые из них соединены авиалиниями, принадлежащими трем авиакомпаниям. Известно, что даже если любая из авиакомпаний прекратит полеты, из любого города можно будет добраться до любого другого, пользуясь рейсами двух оставшихся компаний. Какое наименьшее число авиалиний может быть в стране?

## Учимся писать.

14. В некотором городе есть три тушика, а на каждом перекрёстке сходятся ровно три улицы. Ко дню города улицы покрасили в три цвета так, чтобы на каждом перекрёстке сходились улицы трёх разных цветов. Докажите, что дороги, ведущие в тушики, покрашены в разные цвета.
15. В стране 100 городов и несколько дорог. Каждая дорога соединяет два каких-то города, дороги не пересекаются. Из каждого города можно добраться до любого другого, двигаясь по дорогам. Докажите, что можно объявить несколько дорог главными так, чтобы из каждого города выходило нечётное число главных дорог.