Опять 25.

1. В одной стране каждый год проходит реформа, меняющая названия дней недели: после проведения этой реформы название первого дня недели присваивается дню с номером k_1, второго — дню с номером k_2, и так далее до седьмого, чье название присваивается дню с номером k_7. Все числа k_1,..., k_7 — попарно различные числа от 1 до 7. Известно, что первый день недели через три года после начала реформ снова стал понедельником. Сколько лет нужно подождать с начала проведения реформ, чтобы все дни недели стали называться так, как они назывались изначально?

А если к тому же известно, что пятый день недели всегда назывался пятницей?

Учимся говорить.

2. На столе в ряд лежат 36 различных карт. Над ними производят магическую операцию, в результате которой первая карта оказывается на месте под номером n_1, вторая — на месте под номером n_2, и так далее вплоть до 36-й, которая оказывается на месте $n_3$6. Здесь n_1,...,n_1 — попарно различные числа от 1 до 36. Когда эту операцию сделали 5 раз, карты оказались в исходном положении. Верно ли, что существует карта, все время остававшаяся на своем месте? Сколько таких карт могло быть?

Тот же вопрос, если 5 заменить на 25. А если добавить условие, что на 25-й раз карты впервые окажутся в исходном положении?

А если 5 заменить на 77, и потребовать, чтобы хотя бы половина карт «слетала» со своих мест?

А если 5 заменить на 37?

3. Найдите наименьшее натуральное число, которое давало бы остатки 1, 2, 4 и 6 при делении на 2, 3, 5 и 7 соответственно.

4. Найдите наименьшее натуральное число, половина которого квадрат, треть — куб, а одна пятая — пятая степень.

Учимся писать.

5. Пусть m_1 и m_2 взаимно просты.

a) Докажите, что существует a такое, что $a \equiv 0(\mathrm{mod} m_1)$ и $a \equiv 1(\mathrm{mod} m_2)$.

b) Докажите, что для любых r_1, r_2 существует a такое, что $a \equiv r_1(\mathrm{mod} m_1)$ и $a \equiv r_2(\mathrm{mod} m_2)$.