О повадках одного кузнечика.

Определение. *Кузнечик Кронекера* — зверь, прыгающий по кругу с постоянной длиной прыжка. Науке известны две основные разновидности кузнечиков Кронекера.

Кузнечик иррациональный — существо крайне непостоянное, но вездесущее: оно не попадает в одну точку дважды, но зато всюду плотно заполняет окружность.

В отличие от него, *кузнечик рациональный* — существо крайне предсказуемое, зацикленное на своих шагах. Иррациональным кузнечиков займемся позже, а пока изучим повадки кузнечика рационального.

Сюжет. Кузнечик прыгает по окружности длины 1 (пусть для определенности по часовой стрелке). Длина каждого его прыжка равна $\alpha > 0$. Точки в которых он побывал будем называть отмеченными.

Кузнечик рациональный (теорема). Пусть $\alpha = p/q$, $(p, q) = 1$. Тогда на окружности будет отмечено ровно q точек, которые разбивают окружность на q равных частей. Эти q точек кузнечек проскакивает в некотором порядке за p кругов, после чего зацикливается.

Принцип зацикливания. Если система может находиться лишь в конечном числе состояний, и каждое следующее состояние однозначно определяется по предыдущему, то система с некоторого момента зациклится.

Принцип зацикливания назад (обратный ход). Если в условиях принципа зацикливания каждое предыдущее состояние однозначно восстанавливается по фиксированному числу последующих, то система зацикливается без предпериода.

1. (О последних цифрах степеней)

- **a)** Найдите последнюю цифру числа 18^{2016}.
- **b)** Докажите, что последовательность последних цифр степеней произвольного натурального числа обязательно зацикливается.
- **c)** Докажите, что процесс при этом получается чисто периодический.
- **d)** ****Найдите какие могут получаться длины периодов. Попробуйте объяснить почему именно такие (это сложно).*

2. (О дробях десятичных и обыкновенных)

- **a)** Найдите 2016-ую цифру после запятой в десятичном разложении дроби $3/14$.
- **b)** Докажите, что при переводе обыкновенной дроби в десятичную, всегда получится периодическая десятичная дробь.
- **c)** ****От чего зависит будет дробь с предпериодом или без (это сложно)?*
- **d)** ****От чего зависит длина периода (и это сложно)? В каком случае достигается максимальная длина (и это, тоже, сложно)?*

3. (О блужданиях двоечника)

- **a)** Один преподаватель оставил на дверях всех комнат записки следующего содержания: «Я в комнате номер…» и исчез в неизвестном направлении. (Разные записки могут сообщать разную информацию). Студент-двоечник начал поиски преподавателя, руководствуясь этими указаниями. Докажите, что с некоторого момента он начнет двигаться по циклу
- **b)** Докажите, что если в задаче про комнаты все записки указывают на разные комнаты, то школьник рано или поздно вернется в ту комнату, с которой начал.

Учимся говорить.

1. В тридесятом королевстве у каждого замка и каждой развилки сходятся три дороги. Рыцарь, Любящий Разнообразие, выехал из своего замка и по очереди поворачивает то направо, то налево.

- **a)** Докажите, что его маршрут зациклится.
- **b)** Докажите, что он вернется в замок, из которого начинал движение.

2.
- **a)** Каждое следующее число в последовательности целых чисел получается из предыдущего так: число возводится в квадрат, и из него вычеркиваются все цифры, кроме последних четырех. Докажите, что последовательность периодическая, и длина периода не больше 10000 чисел.
- **b)** А можно ли утверждать что длина периода не больше 5000 чисел?

3. Следующий член последовательности натуральных чисел равен последней цифре произведения двух предыдущих. Докажите, что последовательность

- **a)** периодична;
- **b)** с периодом длины не больше 26;
- **c)** меньше 17.

4. В последовательности 201696230160747865652... каждая цифра, начиная с пятой, равна последней цифре суммы четырех предшествующих цифр.

- **a)** Доказать, что в этой последовательности снова встретится четверка 2016.
- **b)** Встретится ли в этой последовательности четверка 2015?
- **c)** Встретится ли в этой последовательности четверка 4963?

5. Последовательность натуральных чисел задана рекуррентным соотношением $a_{n+1} = s \cdot a_n^2 + 1$, где s — сумма цифр. Докажите, что эта последовательность периодична.

6. Государство Элмышатия всегда существовала и всегда будет существовать. Каждый день в государстве либо идет дождь, либо бушует буря, либо светит солнце. Известно, что погода в данный день однозначно определяется погодой за предшествующую четырехдневку. Всю поледнюю четырехдневку шел дождь. Докажите, что и до и после этого дождливых четырехдневок было бесконечно много.

Учимся писать.

7. В последовательности $\{a_n\}$ $_1 = 7$ и $_{n+1} = a_n^3 + 3$ при всех $n > 1$. Найдется ли в ней число, делящееся на 8?

8.
- **a)** Найдите последние цифры числа 7^7.
- **b)** Найдите последнюю цифру числа 7^{7^7}.
- **c)** Докажите, что последовательность последних цифр чисел 7, 7^7, 7^{7^7}, $7^{7^{7^7}}$ ... является периодической.

9. По кругу стоят 2017 чисел «-1» и «1», причем не все числа одинаковые. Для каждых десяти подряд идущих чисел вычислили их произведение и все такие произведения сложили. Какая наибольшая сумма могла при этом получится?