Серия 18. Разложение на множители.

159. Пусть a, b, c, d – такие вещественные числа, что $a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = a + b + c + d = 0$. Докажите, что сумма каких-то двух из этих чисел равна нулю.

160. Существует ли вещественное α такое, что $\cos\alpha$ – иррациональное число, а все число $\cos 2\alpha$, $\cos 3\alpha$, $\cos 4\alpha$, $\cos 5\alpha$ рациональны?

161. Числа x, y, z удовлетворяют равенству $x + y + z - 2(xy + yz + xz) + 4xyz = \frac{1}{2}$. Докажите, что хотя бы одно из них равно $\frac{1}{2}$.

162. Пусть $P(x)$ и $Q(x)$ – приведённые квадратные трёхчлены, имеющие по два различных корня. Оказалось, что сумма чисел, полученных при подстановке корней трёхчлена $Q(x)$ в $P(x)$, равна сумме чисел, полученной при подстановке корней трёхчлена $P(x)$ в $Q(x)$. Докажите, что у трёхчленов одинаковые дискриминанты.

163. Даны различные натуральные числа a, b. На координатной плоскости нарисованы графики функций $y = \sin ax$, $y = \sin bx$ и отмечены все точки их пересечения. Докажите, что существует натуральное число c, отличное от a и b такое, что график функции $y = \sin cx$ проходит через все отмеченные точки.

164. Положительные числа $x_1, x_2, \ldots, x_{2009}$ удовлетворяют равенствам $x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2 = x_2^2 - x_2x_3 + x_3^2 = x_3^2 - x_3x_4 + x_4^2 = \cdots = x_{2008}^2 - x_{2008}x_{2009} + x_{2009^2} = x_{2009}^2 - x_1x_{2009} + x_1^2$. Докажите, что все иксы равны.

165. Найдите все натуральные k такие, что при каждом нечётном $n > 100$ число $20^n + 13^n$ делится на k.

166. Целые числа a, b, c таковы, что значения квадратных трёхчленов $bx62 + cx + a$ и $cx^2 + ax + b$ при $x = 1234$ совпадают. Может ли первый трёхчлен при $x = 1$ принимать значение 2017?

167. При каких натуральных n найдутся такие положительные рациональные, но не целые числа a и b, что оба числа $a + b$ и $a^n + b^n$ – целые?