Серия 2. Сумма Минковского.

9. Докажите, что выпуклый многоугольник является суммой минковского нескольких отрезков тогда и только тогда, когда он имеет центр симметрии.

10. Верно ли, что любой выпуклый многоугольник представляется в виде суммы минковского треугольников и отрезков?

Если M – выпуклая фигура, то иногда бывает полезно рассмотреть *симметризацию Минковского* этой фигуры, которая определяется как $F + F'$, где F' – фигура, симметричная F относительно точки.

11. *(Была на кружке в прошлом году в теме «усреднение», постарайтесь найти другое решение).* Диаметр (т.е. наибольшее из попарных расстояний между точками) многоугольника равен 1. Докажите, что его периметр не превосходит π.

12. *(Неравенство Бруна-Минковского)* Пусть P_1 и P_2 – две выпуклых фигуры, площади которых равны S_1 и S_2, а площадь фигуры $P_1 + P_2$ равна S. Докажите, что $\sqrt{S} \geqslant \sqrt{S_1} + \sqrt{S_2}$.
Замечание 1. В следующих задачах можно использовать это неравенство без доказательства.
Замечание 2. Можно пользоваться не вполне строгим определением площади фигуры: если фигура нарезана на «почти прямоугольные» длинные узкие полоски ширины d, то площадь фигуры – это примерно сумма длин всех полосок.

13. Диаметр выпуклого многоугольника равен 2. Докажите, что его площадь не превосходит π.

14.*(IMO-2006, №6.)* Каждой стороне b выпуклого многоугольника P поставлена в соответствие наибольшая из прощадей треугольников, содержащихся в P, одна из сторон которых совпадает с b. Докажите, что сумма площадей, соответствующих всем сторонам P, не меньше удвоенной площади P.

15. Обозначим λM фигуру M, сгомотетированную в λ раз. Пусть S_1 и S_2 – площади а) треугольников б) многоугольников M_1 и M_2. Докажите, что площадь $S(\lambda_1, \lambda_2)$ многоугольника $\lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2$ равна

$\lambda_1^2 S_1 + \lambda_2^2 S_2 + \lambda_1 \lambda_2 A$, где число A зависит только от M_1 и M_2.

Как можно оценить A, зная S_1 и S_2?

16. Пусть M – выпуклый многогранник, а B – шар единичного радиуса, функция $V(\lambda)$ – объём тела $M + \lambda B$. Найдите коэффициенты A, B, C, D и докажите формулу

$$V(\lambda) = A + B\lambda + C\lambda^2 + D\lambda^3.$$

17. Докажите, что внутри прямоугольного параллепипеда нельзя поместить (даже поворачивая) прямоугольный параллепипед с большей суммой измерений.