

Серия 1. Сумма Минковского.

1. Вася выписал на доску 10 чисел белым мелом и 20 чисел красным мелом. После этого Петя выписал результаты всевозможных выражений $a + b$, где a — белосе число, а b — красное. Докажите, что у Пети получилось не менее 29 различных чисел.

2. У многочленов $P(x)$ и $Q(x)$ по 100 ненулевых коэффициентов. Какое наибольшее число ненулевых коэффициентов может быть у многочлена $P(x)Q(x)$?

3. На столе радиуса 11 находится 100 точек. Докажите, что на стол можно положить круглую монету диаметра 2, не покрывающую ни одной точки.

Пусть A и B — два подмножества (плоскости, пространства, прямой...). Их *суммой Минковского* $A + B$ называют множество, состоящее из концов всех векторов вида $a + b$, где конец a принадлежит A , а конец b принадлежит B .

4. Нарисуйте сумму Минковского следующих множеств:

- a) внутренность квадрата и точка;
- b) два параллельных отрезка;
- b) два непараллельных отрезка;
- d) три попарно непараллельных отрезка (что такое сумма Минковского трёх и более множеств, догадайтесь сами);
- e) два круга одного радиуса;
- f) две окружности разных радиусов;
- g) круг и внутренность треугольника;
- h) круг и отрезок, перпендикулярный плоскости, в которой лежит круг.

Как изменится сумма Минковского, если перенести на некоторый вектор одно из множеств? Если отсчитывать сумму от другого начала координат?

5. Назовём ε -окрестностью фигуры множество всех точек плоскости, находящихся на расстоянии $< \varepsilon$ от этой фигуры. Пусть T — треугольник площадью S и периметра P , найдите площадь и периметр его ε -окрестности.

6. На плоскости нарисованы два выпуклых многоугольника M_1 и M_2 , у них m_1 и m_2 сторон соответственно. Вася поставил на сторонах многоугольников стрелочки в направлении обхода против часовой стрелки, у него получился набор из $m_1 + m_2$ векторов.

- a) Докажите, что можно нарисовать такой выпуклый $(m_1 + m_2)$ -угольник M , что если у него поставить таким же образом стрелочки на сторонах, получится то самое множество из $m_1 + m_2$ векторов. (M может быть вырожденным, т.е. некоторые его углы могут быть равны 180°)
- b) Докажите, что M — это сумма Минковского внутренностей $M_1 + M_2$.
- c) Докажите, что периметр суммы Минковского двух выпуклых фигур равен сумме периметров этих фигур (достаточно доказать для многоугольников).

7. Выпуклую фигуру периметра P разрезали прямолинейным разрезом длины l на две части. Пусть M — множество середин отрезков с концами в разных частях. Найдите периметр M .

8. Проекция выпуклой фигуры M на любую прямую имеет длину 1. Фигура M' симметрична M относительно начала координат. Докажите, что $M + M'$ — это круг.