

Кружок в "Хамовниках". 2016-2017 учебный год.  
Серия 9. О суммировании.

Вычислите следующие суммы:

67.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}.$$

68.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n \cdot F_{n+2}}$$

, где  $F_n$  — числа Фибоначчи.

69.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^4 + n^2 + 1}.$$

70. Докажите, что

$$\frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{n^3} < \frac{1}{4}$$

71. Докажите, что

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{(k+1)\sqrt{k}} < 2.$$

72. Вычислите сумму

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^3(3^n x)}{3^n}.$$

73. Найдите сумму

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{2n}\right) \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{2n+1}\right).$$

74. Пусть  $a_n$  — количество цифр, больших четырёх в десятичной записи числа  $2^n$ .  
Найдите сумму

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n}.$$

75. Докажите, что для любого натурального  $n$

$$\frac{\varphi(1)}{2^1 - 1} + \frac{\varphi(2)}{2^2 - 1} + \dots + \frac{\varphi(n)}{2^n - 1} < 2,$$

где  $\varphi(n)$  — количество натуральных чисел, не превосходящих  $n$  и взаимно-простых с  $n$ .