

Серия 8. О графах.

58. В графе степени всех вершин равны 3 и между любыми двумя вершинами существует путь длиной не более 2. Какое наибольшее число вершин может быть в этом графе? s

59. В стране Фалкерсонии некоторые города соединены авиалиниями, причем из города A в город B нельзя попасть, сделав менее десяти пересадок. Докажите, что все авиалинии можно распродать 11 авиакомпаниям таким образом, что любой маршрут из A в B будет проходить по линиям, принадлежащим всем 11 компаниям.

60. В стране 2000 городов. Некоторые из них соединены дорогами так, что между любыми двумя городами есть единственный путь, причем он проходит не более чем по восьми дорогам. Город называется захолустным, если из него выходит не более восьми дорог. Докажите, что в стране найдется город, соединенный дорогами как минимум с восьми захолустными.

61. На Луне n городов, некоторые из которых соединены платными дорогами так, что из любого города можно добраться до любого другого. Стоимость проезда по пути, проходящему через несколько городов, определяется как цена проезда по самой дорогостоящей дороге этого пути, а стоимость турпоездки из города A в город B – как стоимость проезда из A в B по самому дешевому пути. Докажите, что в прайс-листе лунного турагентства не более $n - 1$ различных цен.

62. Барон Мюнхгаузен вернулся из отпуска. “Удивительная страна. Стоимости перелётов между всеми парами городов разные, но у всех циклических маршрутов, проходящих по всем городам, суммарная стоимость перелётов одинаковая”. Известно, что городов не менее 2016 и что любые два из них соединены двусторонней авиалинией, причём стоимость перелёта между двумя городами одинаковая в обоих направлениях. Могли ли слова барона оказаться правдой?

63. Все n вершин графа G занумерованы. Известно, что множество вершин графа можно разбить на пять (потенциально пустых) долей с условием, чтобы внутри этих долей не было рёбер, причём это можно сделать единственным с точностью до перестановки долей образом. Докажите, что в графе хотя бы $4n - 10$ рёбер.

64. В графе есть остовное дерево, у которого 2016 висячих вершин, и остовное дерево, у которого 2018 висячих вершин. Обязательно ли есть остовное дерево, у которого 2017 висячих вершин?