Серия 7. Геометрия.

49. В треугольнике ABC проведены биссектрисы BB_1 и CC_1. Известно, что центр описанной окружности треугольника BB_1C_1 лежит на прямой AC. Найдите угол C треугольника.

50. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ выполнено равенство $AB = CD$. Его диагонали пересекаются в точке O. Точки X, Y, Z и T — середины отрезков BC, AD, AC и BD соответственно. Докажите, что центр окружности, описанной вокруг треугольника OZT, лежит на прямой XY.

51. Биссектриса угла C треугольника ABC пересекает его описанную окружность, а также серединные перпендикуляры к сторонам BC и CA в точках R, P и Q соответственно. Пусть S и T середины сторон BC и CA соответственно. Докажите, что треугольники RQT и RPS равновелики.

52. Пусть A', B', C' — соответственные точки касания вписанной окружности $\triangle ABC$. К окружностям, вписанным в треугольники $AB'C'$, $A'BC'$ и $A'B'C$, провели общие внешние касательные. Докажите, что они пересекаются в одной точке.

53. Диагонали трапеции $ABCD$ пересекаются в точке P. Точка Q, лежащая между параллельными прямыми BC и AD такая, что $\angle AQD = \angle CQB$, и точки P и Q лежат в разных полуплоскостях относительно CD. Докажите, что $\angle BQP = \angle DAQ$.

54. Пусть BH — высота в треугольнике ABC. Точки K и L — основания перпендикуляров из точек A и C на внешнюю биссектрису угла B соответственно. Докажите, что описанная окружность треугольника KLH проходит через середину стороны AC.

55. В треугольнике ABC точки A_1, B_1, C_1 — основания высот, точки X, Y, Z — ортоцентры треугольников AB_1C_1, BC_1A_1 и CA_1B_1 соответственно. Докажите, что прямая, проходящая через центры вписанной и описанной окружностей треугольника XYZ параллельна прямой Эйлера треугольника ABC.

56. Две окружности ω_1 и ω_2 с центрами O_1 и O_2 пересекаются в точках A и B. Точки C и D, лежащие соответственно на ω_1 и ω_2 по разные стороны от прямой AB, равноудалены от этой прямой. Докажите, что точки C и D равноудалены от середины отрезка O_1O_2.

57. Пусть I – центр вписанной окружности треугольника ABC, M, N – середины дуг ABC и BAC описанной окружности. Докажите, что точки M, I, N лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда $AC + BC = 3AB$.