Серия 5. Отрезки касательных.

32. Докажите, что четырёхугольник $ABCD$ описанный тогда и только тогда, когда окружности, вписанные в треугольники ABC и ADC , касаются.

33. Пусть B_1 — точка на стороне AC треугольника ABC . Окружности, вписанные в треугольники ABB_1 и CBV_1 , касаются тогда и только тогда, когда B_1 совпадает с точкой касания вписанной окружности треугольника ABC со стороной AC .

34. На стороне AC треугольника ABC выбрана произвольная точка B_1 . В треугольники ABB_1 и CBV_1 вписаны окружности a и c и к ним проведена общая внешняя касательная, отличная от AC . Эта касательная пересекает отрезок BB_1 в точке K . Докажите, что длина отрезка BK не зависит от выбора точки B_1 .

35. На стороне AC треугольника ABC выбрана произвольная точка B_1 . В треугольники ABB_1 и CBV_1 вписаны окружности a и c и к ним проведена общая внешняя касательная ℓ_1 , отличная от AC . Также построены внеписанные окружности b и d этих же треугольников, лежащие напротив точки B и к ним проведена общая внешняя касательная ℓ_2 , отличная от AC . Докажите, что ℓ_1 и ℓ_2 пересекаются на прямой AC .

36. Дан треугольник ABC . На прямой AC выбрана точка B_1 так, что C находится между A и B_1 . В треугольники ABB_1 и CBV_1 вписаны окружности. Докажите, что все прямые, содержащие общую хорду этих окружностей, проходят через фиксированную точку (не зависящую от выбора точки B_1).

37. На стороне AC треугольника ABC выбрана произвольная точка B_1 . В треугольники ABB_1 и CBV_1 вписаны окружности и к ним проведена общая внутренняя касательная, отличная от BB_1 . Докажите, что все такие касательные проходят через фиксированную точку (не зависящую от выбора точки B_1).

38. Каждое звено замкнутой пространственной четырёхзвенной ломаной касается сферы. Докажите, что точки касания ломаной со сферой лежат в одной плоскости.

39. Внутри треугольника ABC выбрана точка S . Прямые AS , BS и CS пересекают соответствующие стороны треугольника в точках A_1 , B_1 и C_1 . Докажите, что если в четырёхугольники AC_1SB_1 и CA_1SB_1 можно вписать окружности, то и в четырёхугольник BA_1SC_1 также можно вписать окружность.

40. В выпуклом описанном четырёхугольнике $ABCD$ окружность S касается сторон AB и AD . Касательная к S , проведённая из B , пересекает сторону CD в точке B_1 , а касательная из D пересекает BC в точке D_1 , а BB_1 в точке A_1 . Докажите, что в четырёхугольник $A_1B_1CD_1$ можно вписать окружность.

41. На стороне AC треугольника ABC выбраны произвольно точки B_1 и B_2 . В треугольники ABB_1 и CBV_1 вписаны окружности a_1 и c_1 соответственно. Аналогично, в треугольники ABB_2 и CBV_2 вписаны окружности a_2 и c_2 . Докажите, что общие внешние касательные к окружностям a_1 и c_2 и к окружностям a_2 и c_1 пересекаются на прямой AC .