

Кружок в "Хамовниках". 2016-2017 учебный год.

Серия 3. О степенях по модулю.

18. (Напоминание.) Рассмотрим ненулевые остатки при делении на нечётное простое число p .

- а) Сколько решений может иметь уравнение $x^2 \equiv c \pmod{p}$?
- б) Докажите, что есть ровно $\frac{p-1}{2}$ квадратичный вычет по модулю p .
- в) Докажите, что если a — квадратичный вычет, то $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod{p}$.
- г) Докажите, что если a — квадратичный невычет по модулю p , то $a^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \pmod{p}$.

19. а) Докажите, что все нечётные простые делители числа $x^2 + 1$ имеют вид $4k + 1$

- б) Докажите, что все нечётные простые делители числа $x^{2^k} + 1$ имеют вид $l \cdot 2^{k+1} + 1$.
- в) Пусть p — простое число. Докажите, что любой простой делитель числа $x^{p-1} + x^{p-2} + \dots + x + 1$ или равен p или имеет вид $pk + 1$.
- г) Пусть p — простое число. Докажите, что среди чисел вида $ap + 1$ бесконечно много простых.
- д) Пусть n — степень простого числа. Докажите, что среди чисел вида $an + 1$ бесконечно много простых.

20. Сколько разных остатков могут давать точные 5ые степени при делении на а) 17?

б) на 31?

21. Докажите, что $a^5 + b^5 + c^5 + 5$ никогда не является точной 5ой степенью.

22. Решите уравнение в натуральных числах $x^2 + 4 = (y - 1)(y^2 + y + 1)$

23. Докажите, что $n^7 + 7$ не может быть квадратом натурального числа.

24. (Финал фестиваля Юных Математиков). Решите уравнение в целых числах: $x^5 + y^7 = 10000$.

25. Можно ли числа от 1 до 2016 разбить на группы по 7 чисел так, чтобы сумма чисел в каждой группе делилась на 2017?

26.а) Вершины правильного n -угольника ($n > 3$) окрашены в несколько цветов так, что вершины каждого цвета являются вершинами некоторого правильного многоугольника. Докажите, что какие-то два из этих многоугольников равны.

б) Натуральный ряд разбит на конечное число арифметических прогрессий (разбит — то есть каждое число принадлежит ровно одной прогрессии). Докажите, что у каких-то двух из них разности совпадают.

в) Останется ли это утверждение верным, если прогрессий может быть бесконечно много?