Серия 26. Индукция. Усиление

В неравенствах

Когда надо усилить.
236. Докажите, что

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}\geqslant 2\sqrt{n}-\frac{3}{2}.$$

237. Докажите, что

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}}<2.$$

Когда надо взять хитрое предположение индукции.
238. Для действительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ доказать, что

$$\frac{a_1}{1+a_1^2}+\frac{a_2}{1+a_1^2+a_2^2}+\ldots+\frac{a_n}{1+a_1^2+\ldots+a_n^2}<\sqrt{n}.$$

Усиливать надо не только в неравенствах.

239. Назовем натуральное число ровным, если в его десятичной записи все цифры одинаковы (например, 3, 111, 444444). Докажите, что любое n-значное число можно представить как сумму не более чем $n+1$ ровных чисел

240. В 100 коробках, стоящих в ряд, лежит суммарно 10000 орехов. За одну операцию можно переложить сколько угодно орехов из любой коробки в соседнюю. Докажите, что за 99 таких операций можно сделать так, что во всех коробках орехов будет поровну.

241. В нашем распоряжении имеются 3^{2k} неотличимых по виду монет, одна из которых фальшивая — она весит чуть легче настоящей. Кроме того, у нас есть трое двухчашечных весов. Известно, что двое весов исправны, а одни — сломаны (показываемый ими исход взвешивания никак не связан с весом положенных на них монет, т.е. может быть как верным, так и искаженным в любую сторону, причем на разных взвешиваниях– искаженным по-разному). При этом неизвестно, какие именно весы исправны, а какие сломаны. Как определить фальшивую монету за $3k+1$ взвешиваний?

242. В дереве n вершин, занумерованных числами от 1 до n. Докажите, что любые n точек плоскости, среди которых никакие три не лежат на одной прямой, можно так занумеровать числами от 1 до n, чтобы никакие два отрезка, соответствующие ребрам дерева, не пересекались.

243. В выпуклом n-угольнике $A_1A_2\ldots A_n$ некоторые отрезки A_iA_j окрашены зеленым цветом так, что зеленые отрезки не пересекаются во внутренних точках. Докажите, что любые n точек плоскости, среди которых никакие три не лежат на одной прямой, можно обозначить B_1, $B_2, \ldots B_n$ так, что при покраске в красный цвет всех отрезков B_iB_j, для которых отрезки A_iA_j — зеленые, красные отрезки также не будут пересекаться во внутренних точках.