Серия 25. Разложение на простые множители.

228. Бесконечная возрастающая арифметическая прогрессия, состоящая из натуральных чисел, содержит точный куб натурального числа. Докажите, что она содержит и точный куб, не являющийся точным квадратом.

229. Бесконечная возрастающая арифметическая прогрессия, состоящая из натуральных чисел, содержит точный куб и точный квадрат. Докажите, что она содержит и точную шестую степень.

230. Докажите, что в бесконечной арифметической прогрессии, состоящей из натуральных чисел, можно выбрать бесконечно много чисел, множество простых делителей у которых совпадают.

231. Дано конечное множество простых чисел P. Докажите, что найдётся такое натуральное число x , что оно представляется в виде $x = a^p + b^p$ (с натуральными a, b) при всех $p \in P$ и не представляется в таком виде для любого простого $p \notin P$.

232. Докажите, что для любого натурального n существуют такие натуральные x, y, что $4x^2 + 9y^2 - 1$ делится на n.

233. На доске написано 2^{1000} чисел, не превосходящих 2016. Докажите, что произведение некоторых подряд идущих из них является полным квадратом.

234. Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел, у которых сумма делителей — точный квадрат.

235. Пусть $x_1, x_2, \dots x_n$ — взамно простые в совокупности натуральные числа, а $s_k = x_1^k + x_2^k + \ldots + x_n^k$. Докажите, что $[1, 2, 3, \dots n]$ делится на $(s_1, s_2, \dots s_n)$.