

Серия . Тригонометрия.

179. Для любого x докажите, что $\sin^2 x + \sin x \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = \frac{3}{4}$.

180. Докажите, что при $x \geq 0$ выполнено:

а) $\sin x \geq x - \frac{x^3}{6}$;

б) $1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$.

181. Докажите, что $x \cos x \leq \frac{\pi^2}{16}$ при $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

182. Сумма синусов трёх углов больше двух. Докажите, что сумма их косинусов не более $\sqrt{5}$.

183. Дано число $0 < \varphi < \pi$. Докажите, что существует такая константа C , что для любого натурального n сумма

$$|\cos \varphi + \cos 2\varphi + \dots + \cos n\varphi| < C.$$

184. Вычислите следующие произведения:

а) $\sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 60^\circ \sin 80^\circ$;

б) $\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 60^\circ \cos 80^\circ$.

185. Докажите, что при $k > 10$ в произведении

$$f(x) = \cos x \cos 2x \cos 3x \dots \cos 2^k x$$

можно заменить один \cos на \sin так, что получится функция $f_1(x)$, удовлетворяющая при всех действительных x неравенству $|f_1(x)| \leq \frac{3}{2^{k+1}}$.

186. Чему равно произведение

$$\cos \frac{\pi}{19} \cos \frac{2\pi}{19} \cos \frac{3\pi}{19} \dots \cos \frac{18\pi}{19}?$$

187. Числа $x_1, x_2, \dots, x_n \in [-1, 1]$ удовлетворяют равенству

$$x_1^3 + x_2^3 + \dots + x_n^3 = 0.$$

Докажите, что

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq \frac{n}{3}.$$

188. Дано двадцать положительных чисел. Докажите, что из них можно выбрать два таких числа a и b , что будет выполнено неравенство $\frac{|a-b|}{1+ab} < \frac{1}{10}$