Серия 10. Неравенства. Сумма квадратов.

80. Для каких n для любых положительных чисел $x_1, x_2, \ldots x_n$ верно, что

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \geqslant x_1(x_2 + x_3 + \ldots + x_n)?$$

81. Положительные числа a, b, c удовлетворяют неравенству $a^2b^2c^2 \geqslant a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2$. Докажите, что $abc \geqslant a + b + c$.

82. Положительные числа a, b, c, d таковы, что $2(a + b + c + d) \geqslant abcd$. Докажите, что $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geqslant abcd$.

83. Для положительных $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_7$ докажите, что

$$a_1^2 - a_2^2 + a_3^2 - a_4^2 + a_5^2 - a_6^2 + a_7^2 \geqslant (a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 + a_7)^2.$$

84. а) x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 – положительные числа. Докажите, что квадрат суммы этих чисел не меньше учетверённой суммы произведений $x_1x_2, x_2x_3, x_3x_4, x_4x_5$ и x_5x_1.

б) При каком наибольшем c_n для любых неотрицательных $x_1, \ldots, x_n$ верно неравенство $(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)2 \geqslant c_n(x_1x_2 + x_2x_3 + ... + x_nx_1)$ (в правой части n слагаемых)?

85. По кругу расставлено не менее четырёх неотрицательных чисел, в сумме равных единице. Докажите, что сумма всех попарных произведений соседних чисел не больше $\frac{1}{4}$.

86. Про пять положительных чисел известно, что если из суммы любых трёх из них вычесть сумму двух оставшихся, то разность будет положительной. Докажите, что произведение всех десяти таких разностей не превосходит квадрата произведения данных пяти чисел.

87. Числа $x_1 \geqslant x_2 \geqslant x_3 \geqslant \ldots \geqslant x_n \geqslant 0$ таковы, что $\frac{x_1}{1} + \frac{x_2}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{x_n}{\sqrt{n}} = 1$. Докажите, что сумма квадратов чисел не больше 1.

88. Докажите, что

$$x_1^2 + (\frac{x_1 + x_2}{2})^2 + (\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3})^2 + \ldots + (\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n})^2 \leqslant 4(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2).$$