Принцип крайнего в комбинаторной геометрии.

Координата.

200. Несколько прямых общего положения разбивают плоскость на части. Докажите, что среди частей разбиения есть хотя бы три части, являющиеся внутренностями угла.

201. Докажите, что многоугольник нельзя покрыть двумя многоугольниками, гомотетичными ему с коэффициентом 0,99.

203. На плоскости расположено $\frac{4}{3}n$ прямоугольников со сторонами, параллельными осям координат. Известно, что любой прямоугольник пересекается хотя бы с n прямоугольниками. Доказать, что найдется прямоугольник, пересекающийся со всеми прямоугольниками.

Площадь.

204. Докажите, что внутри выпуклого многоугольника площади S есть треугольник площади не меньше, чем $\frac{S}{4}$.

205. Дано 100 точек, прчиём площадь никакого треугольника с вершинами в них не превосходит 1. Докажите, что все точки можно покрыть треугольником площади 4.

206. Дан выпуклый пятиугольник $A_1A_2A_3A_4A_5$. На отрезке A_iA_{ii+1} нарисована стрелка в сторону пересечения прямой A_iA_{i+1} с диагональю $A_{i-1}A_{i+1}$ (все индексы нумеруются по модулю 5 циклически). Могут ли стрелки образовывать цикл?

Расстояние.

207. Внутри выпуклого многогранника выбрана точка O. Докажите, что проекция точки O на некоторую грань лежит внутри этой грани (а не просто в плоскости, её содержащей).

208. На плоскости дано n точек и отмечены середины всех отрезков с концами в этих точках. Докажите, что различных отмеченных точек не менее $2n-3$.

209. Множество, состоящее из конечного числа точек плоскости, обладает следующим свойством: для любых двух его точек A и B существует такая точка этого множества, что треугольник ABC равносторонний. Сколько точек может содержать такое множество?

Угол.

210. Докажите, что если длины всех сторон треугольника меньше 1, то его площадь меньше $\sqrt{3}/4$.

211. На сторонах BC, CA и AB треугольника ABC взяты точки A_1, B_1 и C_1. Докажите, что если длины отрезков AA_1, BB_1 и CC_1 не превосходят 1, то площадь треугольника ABC не превосходит $1/\sqrt{3}$.

212. В выпуклом шестиугольнике длины всех неглавных диагоналей не превосходят 1. Докажите, что найдётся главная диагональ, которая не длинее $\frac{2}{\sqrt{3}}$.

Поищите сами.

213. Квадрат разрезали на конечное число прямоугольников. Обязательно ли найдется отрезок, соединяющий центры (точки пересечения диагоналей) двух прямоугольников, не имеющий общих точек ни с какими другими прямоугольниками, кроме этих двух?

214. На плоскости даны точки A_1 , A_2 , A_n и точки B_1 , B_2 , B_n. Докажите, что точки B_i можно перенумеровать так, что для всех i, j угол между векторами $\overrightarrow{A_iB_i}$ и $\overrightarrow{A_jB_j}$ – острый или прямой.

215. Дан выпуклый многоуглник. Докажите, что у него можно выбрать три последовательные вершины так, что проходящая через них окружность содержит многоугольник целиком.

216. Дана треугольная пирамида. Всегда ли можно выбрать два её скрещивающихся ребра и построить на них шары как на диаметрах так, чтобы эти два шара покрывали всю пирамиду?

217. На плоскости взято конечное число красных и синих прямых, среди которых нет параллельных, так, что через каждую точку пересечения одноцветных прямых проходит прямая другого цвета. Докажите, что все прямые проходят через одну точку.