Раскраски. Решения

группа 10-2

10.11.16

1. *Плоскость (соответственно пространство) окрашена в два (соответственно в три) цвета. Докажите, что найдутся две точки*

(a) *одного цвета,*

(b) *разных цветов,*

расстояние между которыми равно 1.

Решение. (a) Рассмотрим правильный треугольник (соответственно правильный тетраэдр) со стороной 1. Некоторые две из его вершин имеют одинаковый цвет (согласно принципу Дирихле).

(b) Выберем две точки A и B разного цвета и пройдём из A в B шагами длины 1. Это можно сделать, например, идя от A к B по прямой с шагом 1. Если же для последнего шага останется отрезок CB короче 1, то построим равнобедренный треугольник CDB со сторонами $CD = DB = 1$ и сделаем вместо шага CB два шага: CD и DB. Последим за цветом точек, по которым шагаем. На каком-то шаге цвет сменится. Начало и конец шага и дадут искомые точки.

Замечание. Решение задачи 1b не зависит от того дана ли нам плоскость или пространство, и не зависит от количества цветов (главное, что их не меньше двух).

2. *Прямая окрашена в два цвета. Докажите, что найдётся отрезок, оба конца и середина которого окрашены в один и тот же цвет.*

Решение. Рассмотрим на прямой две произвольные точки A и B, окрашенные в один цвет. Пусть A_1 — точка, симметричная точке A относительно B, B_1 — точка, симметричная точке B относительно A; O — середина отрезка AB. Если хотя бы одна из точек A_1, B_1, O окрашена в тот же цвет, что и точки A и B, то она вместе с ними образует искомую тройку. Если все эти три точки окрашены в другой цвет, то тогда они будут искомой тройкой.

3. **(a)** *Можно ли раскрасить плоскость (соответственно пространство) в три (соответственно в четыре) цвета так, чтобы любая прямая (соответственно плоскость) оказалась окрашена ровно в два (соответственно ровно в три) цвета?*
(b) *Тот же вопрос, если требуется, чтобы любые две точки, расстояние между которыми равно 1, оказались окрашенными в разные цвета?*

Решение. (a) Можно.

Случай плоскости. В белой плоскости проведём две пересекающиеся синии прямые, а их точку пересечения покрасим в чёрный.

Случай пространства. В белом пространстве проведём три пересекающиеся в одной точке синии плоскости, прямые их попарного пересечения покрасим в красный цвет, а их точку пересечения покрасим в чёрный.

(b) Нельзя. Предположим противное, пусть нам удалось раскрасить так плоскость (соответственно пространство). Рассмотрим точку O чёрного цвета.

Случай плоскости. На окружности с центром O и радиусом 1 нет точек чёрного цвета. Рассмотрим правильный шестиугольник с вершинами на этой окружности. Вершины этого шестиугольника окрашены в два цвета, отличные от чёрного. Тогда цвета вершин будут чередоваться. Поэтому две противоположные вершины шестиугольника будут окрашены в разные цвета. Прямая, проходящая через эти две вершины, содержит также точку O, а значит, содержит точки трёх разных цветов. Противоречие.

Случай пространства. Рассмотрим любую плоскость, проходящую через точку O. Эта плоскость окрашена в три цвета. Далее, как и в случае плоскости, находим прямую, содержащую точки трёх разных цветов. Тогда плоскость, содержащая точку четвертого цвета и эту прямую, окрашена в четыре цвета.

Замечание. Ответ на задачу 3b также даёт задача 6.

4. **(a)** *Плоскость окрашена в два цвета.*
(b) *Плоскость окрашена в n цветов.*

Докажите, что найдется прямоугольник вершины которого окрашены в один цвет.

Решение. Докажем сразу второй пункт. Рассмотрим $n+1$ горизонтальную прямую. Рассмотрим точки пересечения вертикальных прямых с этими $n+1$ горизонтальными. Существует лишь конечное число способов раскрасить в n цветов $n+1$ точку пересечения вертикальной прямой с этими $n+1$ горизонтальными (а именно n^{n+1}). Поэтому найдутся две такие вертикальные прямые a и b, что точки этих прямых, расположенные на i-ой горизонтальной прямой ($i = 1, 2, \ldots, n+1$), имеют один и тот же цвет. Поскольку прямая a пересекается с $n+1$ горизонтальной прямой, то среди этих $n+1$ точки пересечения найдутся две точки X и Y одного цвета. На прямой b две точки X' и Y', расположенные на тех же горизонтальных прямых, что и точки X и Y, окрашены тем же цветом, что и точки X и Y. Таким образом, точки X, Y, X', Y' являются вершинами прямоугольника и имеют один и тот же цвет.

Замечание. На самом деле, здесь нигде не использовалось, что окрашена вся плоскость. В условии можно заменить плоскость на точки с целочисленными координатами или на бесконечную клетчатую доску, и считать окрашенными эти точки или клетки соответственно. Решение будет аналогичным.

5. *Плоскость окрашена в три цвета. Докажите, что найдется прямоугольный треугольник с вершинами трех разных цветов.*

Решение. Рассмотрим некоторую прямую. Все прямые ей параллельные будем называть *вертикальными*, а все прямые ей перпендикулярные — *горизонтальными.*

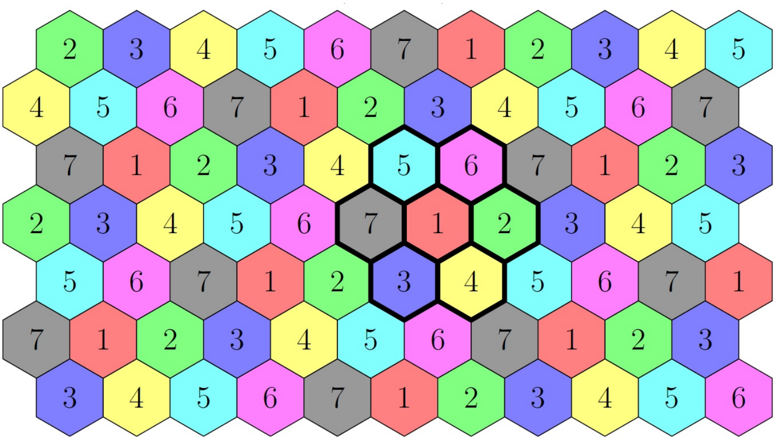
Если каждая вертикальная прямая содержит точки только одного цвета, то выберем любую точку и проведем через неё две перпендикулярные прямые, отличные от горизонтальных и вертикальных, и выберем на этих прямых точки цветов 2 и 3 (это возможно, поскольку существуют вертикальные прямые этих цветов). Полученный треугольник будет искомым. Аналогично, если все горизонтальные прямые содержат точки только одного цвета.

Если есть вертикальная прямая l, которая содержит точки ровно двух цветов (скажем 1 и 2), то выберем любую точку C цвета 3, точку $A \in l$, лежащую на одной горизонтали с точкой C, (пусть точка A имеет цвет 1) и точку B цвета 2 на прямой l.

Если же есть вертикальная прямая m , на которой встречаются все три цвета, то выберем горизонтальную прямую n, на которой не все точки одного цвета. Пусть точка A их пересечения имеет цвет 1, тогда выберем на n точку B цвета, отличного от 1 (скажем, цвета 2), а на m точку C третьего цвета.

6. *Плоскость (соответственно пространство) окрашена в три (соответственно в четыре) цвета. Докажите, что найдутся две точки одного цвета, расстояние между которыми равно 1.*

Решение. Предположим обратное. Тогда рассмотрим точку A цвета 1 и правильный треугольник ABC (соответственно правильный тетраэдр $ABCD$) со стороной 1. Точки B и C окрашены в цвета 2 и 3 (точка D в цвет 4). Рассмотрим правильный треугольник BCE (соответственно правильный тетраэдр $BCDE$). Точка E окрашена в первый цвет. Расстояние между A и E равно $\sqrt{3}$ (соответственно $2\sqrt{2/3}$). Повторяя такую операцию для произвольных точек получим, что все точки на расстоянии $\sqrt{3}$ (соответственно $2\sqrt{2/3}$) от A окрашены в первый цвет, а т. к. среди них найдутся 2 точки на расстоянии 1, получаем требуемое утверждение.



7. *Раскрасьте плоскость в семь цветов так, чтобы любые две точки, расстояние между которыми равно 1, оказались окрашенными в разные цвета.*

Решение. Раскраска в 7 цветов. Границы шестиугольников окрашены в любой цвет, их диаметр 0,99: (см. рисунок)

8. *Плоскость окрашена в два цвета: красный и синий. Докажите, что либо для любого положительного l найдется отрезок длины l с синими концами, либо для любого треугольника найдется равный ему треугольник с красными вершинами (либо и то и другое).*

Решение. Предположим обратное. Тогда существует треугольник KLM, что у всех треугольников ему равных есть синяя вершина и существует $x > 0$, что все отрезки длины x имеют разноцветные концы. Рассмотрим некоторый треугольник ABC, равный треугольнику KLM.

Если у него все вершины синего цвета, то все точки на окружностях с центрами в вершинах треугольника и радиусами, равными x, красного цвета. Тогда рассмотрим треугольник $A'B'C'$, полученный из треугольника ABC параллельным переносом на вектор длины x. У этого треугольника все вершины лежат на указанных выше окружностях и потому красного цвета. Противоречие. Значит не бывает треугольников, равных треугольнику KLM, с вершинами синего цвета.

Если у треугольника ABC вершины A и B синего цвета, а вершина C красного цвета, то, как и ранее, все точки на окружностях с центрами A и B и радиусами, равными x, красного цвета. Если бы на окружности с центром C и радиусом x не было красных точек, то там есть две синие точки на расстоянии x. Значит, там есть точка C' красного цвета. Рассмотрим треугольник $A'B'C'$, полученный из треугольника ABC параллельным переносом на вектор $\overrightarrow{CC'}$. Как и ранее, у него все вершины красного цвета. Противоречие. Значит не бывает треугольников, равных треугольнику KLM, с двумя синими вершинами и одной красной.

Пусть все треугольники, равные треугольнику KLM, имеют одну синюю вершину и две красных. Пусть у треугольника ABC вершина C синего цвета, остальные красного. Рассмотрим окружности ω_A и ω_B с центром в точке C и радиусами CA и CB соответственно (эти окружности могут совпадать). Если бы на этих окружностях лежала точка A' синего цвета (для определенности, пусть $A' \in \omega_A$), то треугольник $A'B'C'$, полученный из треугольника ABC поворотом на угол $\angle ACA'$ в нужную сторону, имел бы хотя бы две вершины синего цвета. Значит, эти окружности содержат только точки красного цвета. Рассмотрим такую точку D, $ACBD$ — параллелограмм (BC — диагональ). Ясно, что точка D окрашена в синий. Также ясно, что окружность ω_D с центром в точке C и радиусом CD будет содержать только точки синего цвета (вращая треугольник ABC вокруг точки C его красные вершины A и B будут бегать по окружностям ω_A и ω_B, а точка D по окружности ω_D). Аналогично, окружность ω с центром в точке D и радиусом DC будет содержать только точки синего цвета. Но окружности ω и ω_A разного цвета и пересекаются. Противоречие.

9. *Пространство окрашено в пять цветов. Докажите, что найдется*

(a) *плоскость, окрашенная не менее, чем в 4 цвета.*

(b) *прямая, окрашенная не менее, чем в 3 цвета.*

Решение. (a) Если некоторая прямая окрашена в 3 или более цветов, то проведём плоскость через эту прямую и точку одного из недостающих цветов. Эта плоскость будет окрашена не менее, чем в 4 цвета. Далее, предположим, что каждая прямая окрашена не более, чем в 2 цвета. Далее есть два способа.

Первый способ. Фиксируем по одной точке каждого из пяти цветов. Пусть никакие четыре из этих пяти точек не лежат в одной плоскости (в противном случае решение очевидно). Рассмотрим прямые, попарно соединяющие эти точки (их 10 штук). Они пересекают некоторую плоскость α, им не параллельную, в 10 различных точках. Покажем, что эти 10 точек окрашены не менее, чем в 4 цвета. В противном случае некоторые 2 цвета (например, 1 и 2) отсутствуют. Но одним из этих цветов должна быть окрашена точка пересечения прямой, соединяющей точки цветов 1 и 2, с плоскостью α (вся эта прямая окрашена в два цвета 1 и 2).

Второй способ. Предположим, что нет плоскости, окрашенной не менее, чем в 4 цвета. Тогда все плоскости окрашены не более, чем в 3 цвета. Рассмотрим прямую l, проходящую через точки цветов 1 и 2, и плоскость α, проходящую через точки цветов 3, 4 и 5. Они параллельны, иначе противоречие с предположением. В плоскости α все прямые, параллельные прямой l, окрашены в один цвет, иначе через такую прямую и прямую l можно провести плоскость которая будет окрашена не менее, чем в 4 цвета. Возьмём любую плоскость β, пересекающуюся с прямой l, тогда её пересекают все прямые, параллельные l. Поэтому она содержит точки четырёх различных цветов. Противоречие.

(b) Возьмём теперь найденную в задаче 9a плоскость, окрашенную не менее, чем в 4 цвета. Перекрасим все точки цвета 5, если они есть, в цвет 4. Если в так перекрашенной плоскости найдётся прямая, окрашенная не менее, чем в 3 цвета, то в изначально окрашенной плоскости та же прямая будет окрашена не менее, чем в 3 цвета. Теперь можно считать, что плоскость окрашена ровно в 4 цвета. Далее есть два способа.

Первый способ. Делаем аналогично первому способу решения в задаче 9a. Предположим, что каждая прямая окрашена не более, чем в 2 цвета. Фиксируем по одной точке каждого из четырёх цветов. Рассмотрим прямые, попарно соединяющие эти точки (их 6 штук). Они пересекают некоторую прямую l, им не параллельную, в 6 различных точках. Эти 6 точек окрашены не менее, чем в 3 цвета, иначе некоторые 2 цвета (например, 1 и 2) отсутствовали бы, но одним из этих цветов должна быть окрашена точка пересечения прямой, соединяющей точки цветов 1 и 2, с прямой l.

Второй способ. Предположим, что нет прямой, окрашенной не менее, чем в 3 цвета. Тогда рассмотрим прямые l_1 и l_2, проходящие через точки цветов 1, 2 и 3, 4 соответственно. Они параллельны, иначе противоречие с предположением. Рассмотрим на них точки A, B, C и D цветов 1, 2, 3 и 4 соответственно. Но тогда или прямые AC, BD, или прямые AD, BC пересекаются, поэтому одна из них содержит хотя бы три цвета. Противоречие.

Замечание. Здесь в решении задачи 9b мы на самом деле доказали более сильное утверждение, чем от нас требовалось, а именно: *если плоскость окрашена не менее, чем в 4 цвета, то найдётся прямая, окрашенная не менее, чем в 3 цвета.*