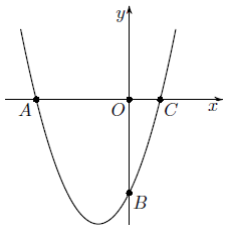
Безу, Виет и прочие

группа 10-2

17.04.17

1. На рисунке изображен график функции $y = x^2 + ax + b$. Известно, что прямая AB перпендикулярна прямой $y = x$. Найдите длину отрезка OC.



2. Многочлен с целыми коэффициентами при трёх различных целых значениях переменной принимает значение 1. Докажите, что он не имеет ни одного целого корня.

3. Известно, что для рациональных чисел $x_1, x_2, ..., x_n$ выражения

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n,$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n,$$

$$x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \cdots + x_{n-2}x_{n-1}x_n,$$

$$\cdots$$

$$x_1x_2 \ldots x_n$$

являются целыми. Докажите, что исходные числа являются целыми.

4. Пусть $P(x)$ и $Q(x)$ многочлены с целыми коэффициентами, причем $P(Q(x)) = Q(P(x))$. Докажите, что при всех целых n число $P(P(n)) - Q(Q(n))$ делится на $P(n) - Q(n)$, если $P(n) \neq Q(n)$.

5. Многочлен $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ имеет три различных действительных корня, а многочлен $P(Q(x))$, где $Q(x) = x^2 + x + 2017$, действительных корней не имеет. Докажите, что $P(2017) > 1/64$.

6. Дано множество различных чисел $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$. Могло ли так оказаться, что множество корней уравнений $x^2 - a_ix + b_i = 0$ (для всех $i = 1, 2, \ldots, n$) совпадать с исходным множеством?

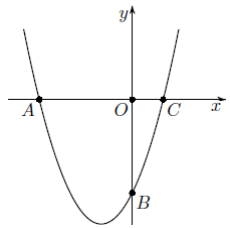
7. Дан многочлен двадцатой степени с целыми коэффициентами. На плоскости отметили все точки с целыми координатами, у которых ординаты не меньше 0 и не больше 10. Какое наибольшее число отмеченных точек может лежать на графике этого многочлена?

Безу, Виет и прочие

группа 10-2

17.04.17

1. На рисунке изображен график функции $y = x^2 + ax + b$. Известно, что прямая AB перпендикулярна прямой $y = x$. Найдите длину отрезка OC.



2. Многочлен с целыми коэффициентами при трёх различных целых значениях переменной принимает значение 1. Докажите, что он не имеет ни одного целого корня.

3. Известно, что для рациональных чисел $x_1, x_2, ..., x_n$ выражения

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n,$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n,$$

$$x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \cdots + x_{n-2}x_{n-1}x_n,$$

$$\cdots$$

$$x_1x_2 \ldots x_n$$

являются целыми. Докажите, что исходные числа являются целыми.

4. Пусть $P(x)$ и $Q(x)$ многочлены с целыми коэффициентами, причем $P(Q(x)) = Q(P(x))$. Докажите, что при всех целых n число $P(P(n)) - Q(Q(n))$ делится на $P(n) - Q(n)$, если $P(n) \neq Q(n)$.

5. Многочлен $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ имеет три различных действительных корня, а многочлен $P(Q(x))$, где $Q(x) = x^2 + x + 2017$, действительных корней не имеет. Докажите, что $P(2017) > 1/64$.

6. Дано множество различных чисел $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$. Могло ли так оказаться, что множество корней уравнений $x^2 - a_ix + b_i = 0$ (для всех $i = 1, 2, \ldots, n$) совпадать с исходным множеством?

7. Дан многочлен двадцатой степени с целыми коэффициентами. На плоскости отметили все точки с целыми координатами, у которых ординаты не меньше 0 и не больше 10. Какое наибольшее число отмеченных точек может лежать на графике этого многочлена?