

Разной по геометрии

группа 10-2

10.04.2017

1. На стороне BC треугольника ABC выбрана точка D . Окружность, описанная около треугольника ADB , пересекает сторону AC в точке M , а окружность, описанная около треугольника ADC , пересекает сторону AB в точке N ($M, N \neq C$). Пусть O — центр описанной окружности треугольника AMN . Докажите, что $OD \perp BC$.
2. В окружность вписан четырёхугольник $ABCD$. На лучах AC и DC отмечены точки P и Q соответственно так, что $AP = AB$ и $DQ = DB$. Докажите, что прямая PQ проходит через отражение вершины B относительно прямой AD .
3. Внутри выпуклого четырёхугольника $ABCD$ нашлась такая точка X , что $\angle XDC = \angle BAC$ и $\angle XBC = \angle DAC$. Докажите, что $\angle BCA = \angle XCD$.
4. Хорда XY описанной окружности треугольника ABC пересекает стороны AB и AC в точках C_1 и B_1 соответственно. На стороне BC отмечены точки P и Q , так что $PC_1 \parallel AC$, $QB_1 \parallel AB$. Докажите, что точки X , Y , P , Q лежат на одной окружности.
5. Серединный перпендикуляр к стороне AC неравнобедренного остроугольного треугольника ABC пересекает прямые AB и BC в точках B_1 и B_2 соответственно, а серединный перпендикуляр к стороне AB пересекает прямые AC и BC в точках C_1 и C_2 соответственно. Окружности, описанные около треугольников BB_1B_2 и CC_1C_2 пересекаются в точках P и Q . Докажите, что центр окружности, описанной около треугольника ABC , лежит на прямой PQ .
6. Точка M — середина стороны AC треугольника ABC . На отрезках AM и CM выбраны точки P и Q соответственно таким образом, что $PQ = AC/2$. Окружность, описанная около треугольника ABQ , пересекает сторону BC в точке $X \neq B$, а окружность, описанная около треугольника BQP , пересекает сторону AB в точке $Y \neq B$. Докажите, что четырёхугольник $BXMY$ — вписанный.
7. На стороне BC равностороннего треугольника ABC с центром I отмечена точка X . Из точки X опустили перпендикуляры XP и XQ на стороны AB и AC соответственно. Докажите, что прямая XI делит отрезок PQ пополам.
8. На «меньших» дугах AB , AC описанной окружности треугольника ABC отмечены точки M и N соответственно так, что $MN \parallel BC$. Докажите, что центры вписанных окружностей треугольников ABM и ACN равноудалены от середины дуги BAC .
9. В треугольник ABC вписана окружность с центром I ; M и N — середины сторон AB и BC соответственно. Прямые CI и MN пересекаются в точке P . Точка Q такова, что $PQ \perp MN$, $QN \parallel AI$. Докажите, что $QI \perp BC$.