

## Вспоминаем интерполяцию

группа 10-2

06.04.17

1. Докажите тождество

$$c^2 \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} + b^2 \frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)} + a^2 \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} = x^2.$$

2. Про многочлен  $f(x) = x^{10} + a_9x^9 + \dots + a_0$  известно, что  $f(1) = f(10)$ ,  $f(2) = f(9)$ ,  $\dots$ ,  $f(5) = f(6)$ . Докажите, что график функции  $f(x)$  имеет ось симметрии.

3. Пусть  $P(x)$  ненулевой многочлен, который удовлетворяет условию

$$(x-1)P(x+1) = (x+2)P(x)$$

для любого  $x$ , и  $(P(2))^2 = P(3)$ . Найти  $P(x)$ .

4. Даны два многочлена положительной степени  $P(x)$  и  $Q(x)$ , причём при всех  $x$  выполнены равенства  $P(P(x)) = Q(Q(x))$  и  $P(P(P(x))) = Q(Q(Q(x)))$ . Обязательно ли тогда при всех  $x$  выполнено равенство  $P(x) = Q(x)$ ?

5. Известно, что некоторый многочлен в рациональных точках принимает рациональные значения. Докажите, что все его коэффициенты рациональны.

6. Лёня записал на доске 100 чисел. Затем он увеличил каждое число на 1 и заметил, что произведение всех 100 чисел не изменилось. Он опять увеличил каждое число на 1, и снова произведение всех чисел не изменилось, и так далее. Всего Лёня повторил эту процедуру  $k$  раз, и все  $k$  раз произведение чисел не менялось. Найдите наибольшее возможное значение  $k$ .

7. Парабола  $f(x)$  удовлетворяет следующим условиям:

$$f(0) \in [0, 1], f(\pm 2) \in [3, 4], f(3) \in [9, 10].$$

Найдите  $f(x)$ .

8. Даны два различных приведённых кубических многочлена  $F(x)$  и  $G(x)$ . Выписали все корни уравнений  $F(x) = 0$ ,  $G(x) = 0$ ,  $F(x) = G(x)$ . Оказалось, что выписаны 8 различных чисел. Докажите, что наибольшее и наименьшее из них не могут одновременно являться корнями многочлена  $F(x)$ .

## Вспоминаем интерполяцию

группа 10-2

06.04.17

1. Докажите тождество

$$c^2 \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} + b^2 \frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)} + a^2 \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} = x^2.$$

2. Про многочлен  $f(x) = x^{10} + a_9x^9 + \dots + a_0$  известно, что  $f(1) = f(10)$ ,  $f(2) = f(9)$ ,  $\dots$ ,  $f(5) = f(6)$ . Докажите, что график функции  $f(x)$  имеет ось симметрии.

3. Пусть  $P(x)$  ненулевой многочлен, который удовлетворяет условию

$$(x-1)P(x+1) = (x+2)P(x)$$

для любого  $x$ , и  $(P(2))^2 = P(3)$ . Найти  $P(x)$ .

4. Даны два многочлена положительной степени  $P(x)$  и  $Q(x)$ , причём при всех  $x$  выполнены равенства  $P(P(x)) = Q(Q(x))$  и  $P(P(P(x))) = Q(Q(Q(x)))$ . Обязательно ли тогда при всех  $x$  выполнено равенство  $P(x) = Q(x)$ ?

5. Известно, что некоторый многочлен в рациональных точках принимает рациональные значения. Докажите, что все его коэффициенты рациональны.

6. Лёня записал на доске 100 чисел. Затем он увеличил каждое число на 1 и заметил, что произведение всех 100 чисел не изменилось. Он опять увеличил каждое число на 1, и снова произведение всех чисел не изменилось, и так далее. Всего Лёня повторил эту процедуру  $k$  раз, и все  $k$  раз произведение чисел не менялось. Найдите наибольшее возможное значение  $k$ .

7. Парабола  $f(x)$  удовлетворяет следующим условиям:

$$f(0) \in [0, 1], f(\pm 2) \in [3, 4], f(3) \in [9, 10].$$

Найдите  $f(x)$ .

8. Даны два различных приведённых кубических многочлена  $F(x)$  и  $G(x)$ . Выписали все корни уравнений  $F(x) = 0$ ,  $G(x) = 0$ ,  $F(x) = G(x)$ . Оказалось, что выписаны 8 различных чисел. Докажите, что наибольшее и наименьшее из них не могут одновременно являться корнями многочлена  $F(x)$ .