Равновеликость и равносоставленность

группа 10-2
30.03.17

Определение. Многоугольники называются *равновеликими*, если их площади совпадают.

Определение. Многоугольники называются *равносоставленными*, если один из них можно разрезать на части, переложив которые, можно получить другой.

Несложно заметить, что любые два равносоставленных многоугольника равновелики. Оказывается, что помимо этого верна следующая

Теорема. (Ф. Бойяи, П. Гервин; 1832) Любые два равновеликих многоугольника равносоставлены.

Давайте ее докажем.

1. Если многоугольники P и Q равносоставлены и многоугольники Q и R равносоставлены, то многоугольники P и R тоже равносоставлены

2. Всякий треугольник можно перекроить в параллелограмм равной площади.

3. Всякий треугольник можно перекроить в прямоугольник равной площади

4. Два равновеликих параллелограмма с равными основаниями равносоставлены.

5. Если a больше какой-нибудь стороны прямоугольника, то прямоугольник можно перекроить в параллелограмм такой же площади со стороной a.

6. Если a больше какой-нибудь стороны прямоугольника, то прямоугольник можно перекроить в прямоугольник такой же площади со стороной a.

7. Любые два равновеликих прямоугольника равносоставлены.

8. Любой треугольник можно перекроить в равновеликий прямоугольник со стороной 1.

9. Докажите теорему Бойяи-Гервина.

See you on the other side.

Хотелось бы верить, что существует похожая теорема и для многогранников, однако не все так просто. Давайте разбираться.

Определение. Пусть $M = \{m_1, \ldots, m_k\} \subseteq \mathbb{R}$. Определим

$$V(M) = \left\{ \sum_{i=1}^{k} q_i m_i | q_i \in \mathbb{Q} \right\} \subseteq \mathbb{R}$$

Будем рассматривать $\mathbb{Q}$-*линейные функции* f, которые удовлетворяют следующим свойствам:

$\forall a, b \in \mathbb{R}, \lambda \in \mathbb{Q}$

- $f(a + b) = f(a) + f(b)$
- $f(\lambda a) = \lambda f(a)$

К примеру, $f\left(\sum_{i=1}^{k} q_i m_i\right) = \sum_{i=1}^{k} q_i f(m_i)$, т.е. значение функции во всех точках множества $V(M)$ определяется только значениями функции в точках множества M.

10. Пусть $M \subseteq M' \subset \mathbb{R}$. Тогда для любой $\mathbb{Q}$-линейной функции $f : V(M) \to \mathbb{Q}$ существует $\mathbb{Q}$-линейная функция $f' : V(M') \to \mathbb{Q}$ такая, что для всех $m \in M : f(m) = f'(m)$. Грубо говоря, любая $\mathbb{Q}$-линейная функция f *продолжается* с M на M'.

Определение. Возьмем многогранник P. Обозначим через M_P множество всех двугранных углов между соседними гранями, дополненное числом π. Рассмотрим $\mathbb{Q}$-функцию $f : V(M_P) \to \mathbb{R}$ такую, что $f(\pi) = 0$.

Инвариантом Дена многогранника P относительно $\mathbb{Q}$-функции f назовем величину, равную

$$D_f(P) = \sum_{e \in P} l(e) \cdot f(\alpha(e)),$$

где e – ребро многогранника P, $l(e)$ – его длина, а $\alpha(e)$ – величина соответствующего двугранного угла.

11. Пусть $\{P_1, \ldots, P_n\}$ – разбиение многогранника P. Пусть $M_{P_1} \cup \ldots \cup M_{P_n}$. Тогда для любой $\mathbb{Q}$-функции $f : V(M) \to \mathbb{R}$ выполняется равенство [1]

$$D_f(P) = D_f(P_1) + \ldots + D_f(P_n)$$

12. Докажите, что если два многогранника P и Q равносоставлены, то для любой $\mathbb{Q}$-функции

$f : V(M_P \cup M_Q) \to \mathbb{R}$ такой, что $f(\pi) = 0$, выполняется равенство $D_f(P) = D_f(Q)$.

13. Найдите инвариант Дена для куба.

14. Найдите инвариант Дена для правильного тетраэдра.

15. Докажите, что $\frac{1}{\pi} arccos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ иррационально.[2]

16. Докажите, что найдутся два равновеликих, но не равносоставленных многоугольника.

17. Найдите инвариант Дена тетраэдра, натянутого на три попарно ортогональных ребра одинаковой длины, отложенных от одной вершины.

18. Найдите инвариант Дена тетраэдра, имеющего цепочку последовательных попарно ортогональных ребер одинаковой длины.[3]

---

[1]Рассмотрите отдельно каждое возникшее ребро и посмотрите, какой оно дает вклад в общую сумму.
[2]Вполне можете эту задачу пропустить, а утверждение принять на веру.
[3]HINT: Из шести таких штук можно сложить куб. Как?!