

# Про коники

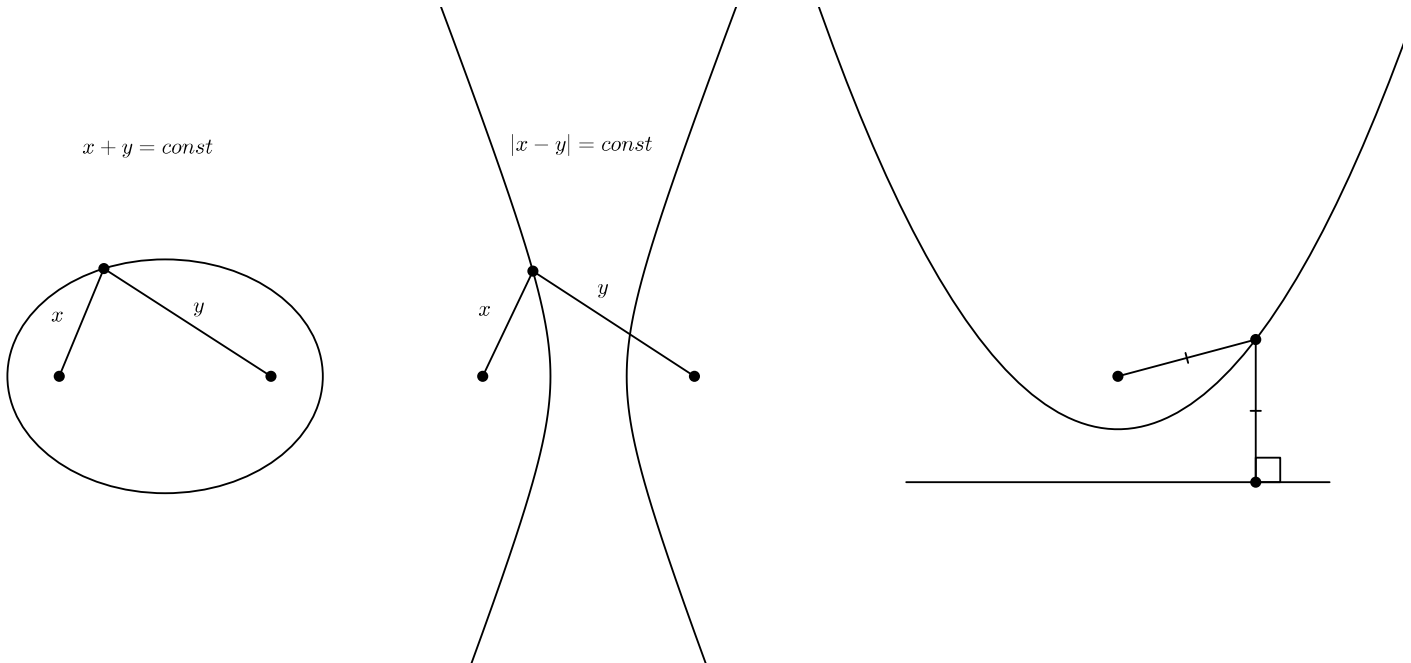
группа 10-2

23.03.17

**Определение.** Эллипсом с фокусами  $F_1$  и  $F_2$  называется ГМТ таких точек  $X$ , что  $F_1X + F_2X = const.$

**Определение.** Гиперболой с фокусами  $F_1$  и  $F_2$  называется ГМТ таких точек  $X$ , что  $|F_1X - F_2X| = const.$

**Определение.** Параболой с фокусом  $F$  и директрисой  $l$  называется ГМТ таких точек  $X$ , что расстояние  $FX$  равно расстоянию от  $X$  до прямой  $l$ .



1. Докажите, что для любой точки внутри эллипса сумма расстояний от нее до фокусов меньше той константы из определения. А что происходит в случае гиперболы и параболы?
2. (**Оптическое свойство**). Пусть  $l$  – касательная к эллипсу в точке  $P$ . Докажите, что  $l$  является внешней биссектрисой угла  $F_1PF_2$ . Сформулируйте и докажите похожее утверждение для гиперболы и параболы.
3. Пусть хорда  $PQ$  проходит через фокус  $F_1$  эллипса,  $R$  – точка пересечения касательных к эллипсу в точках  $P$  и  $Q$ . Докажите, что  $R$  – это центр вневписанной окружности треугольника  $F_2PQ$ , а  $F_1$  – это точка касания этой окружности со стороной  $PQ$ . Опять же, что в остальных случаях?
4. (**Изогональное свойство**). Из точки  $P$  вне эллипса проведены касательные  $PX$  и  $PY$ . Тогда:
  - (a)  $\angle F_1PX = \angle F_2PY$ .
  - (b)  $F_1P$  является биссектрисой угла  $XF_1Y$ .
5. (**Важное свойство**). Из предыдущей задачи видно, что если в треугольник вписана коника, то ее фокусы изогонально сопряжены (почему?!). Докажите обратное утверждение.
6. Найдите ГМТ точек, из которых эллипс виден под прямым углом.
7. Пусть вокруг параболы описан треугольник  $ABC$ . Оказывается, что
  - (a) фокус этой параболы лежит на описанной окружности треугольника  $ABC$ .
  - (b) ортоцентр треугольника  $ABC$  лежит на директрисе параболы.
8. По двум прямым дорогам с постоянными скоростями идут два пешехода. Докажите, что соединяющая их прямая все время касается некоторой параболы (дороги не параллельны, и через точку пересечения дорог пешеходы проходят не одновременно).