

Про коники

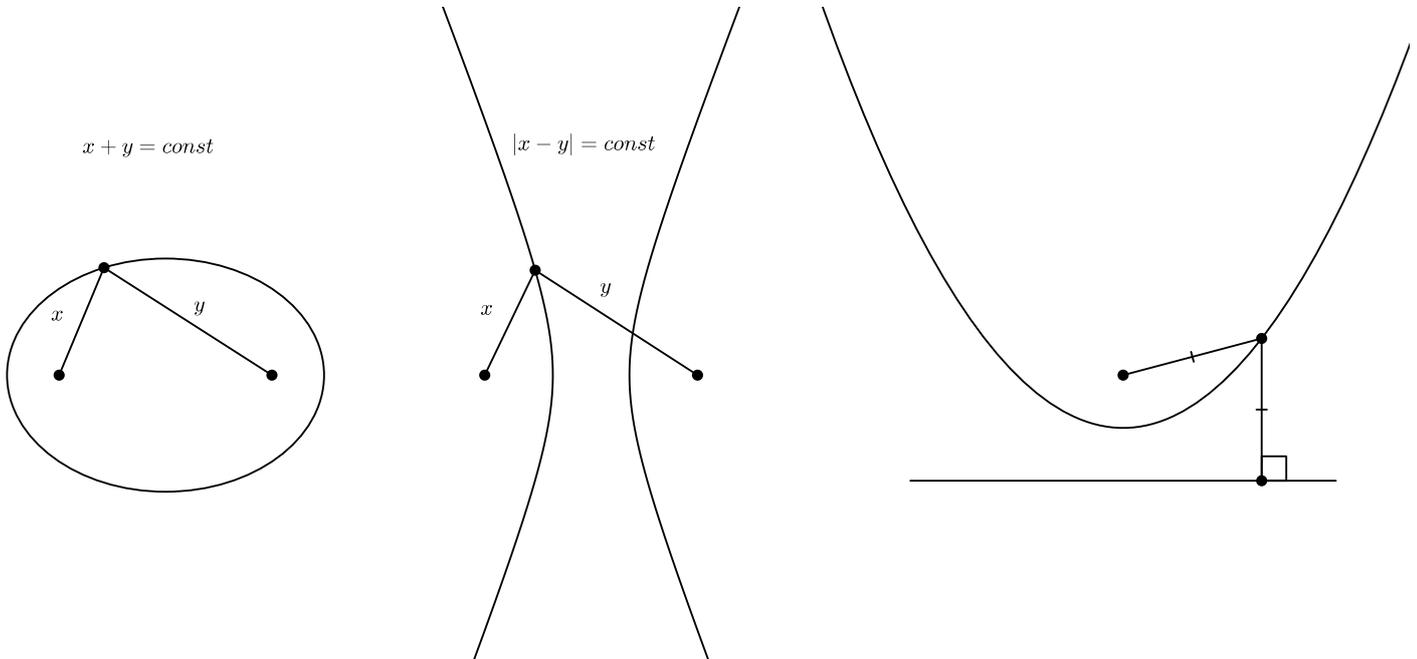
группа 10-2

23.03.17

Определение. Эллипсом с фокусами F_1 и F_2 называется ГМТ таких точек X , что $F_1X + F_2X = const.$

Определение. Гиперболой с фокусами F_1 и F_2 называется ГМТ таких точек X , что $|F_1X - F_2X| = const.$

Определение. Параболой с фокусом F и директрисой l называется ГМТ таких точек X , что расстояние FX равно расстоянию от X до прямой l .



1. Докажите, что для любой точки внутри эллипса сумма расстояний от нее до фокусов меньше той константы из определения. А что происходит в случае гиперболы и параболы?
2. (**Оптическое свойство**). Пусть l – касательная к эллипсу в точке P . Докажите, что l является внешней биссектрисой угла F_1PF_2 . Сформулируйте и докажите похожее утверждение для гиперболы и параболы.
3. Пусть хорда PQ проходит через фокус F_1 эллипса, R – точка пересечения касательных к эллипсу в точках P и Q . Докажите, что R – это центр вневписанной окружности треугольника F_2PQ , а F_1 – это точка касания этой окружности со стороной PQ . Опять же, что в остальных случаях?
4. (**Изогональное свойство**). Из точки P вне эллипса проведены касательные PX и PY . Тогда:
 - (a) $\angle F_1PX = \angle F_2PY$.
 - (b) F_1P является биссектрисой угла XF_1Y .
5. (**Важное свойство**). Из предыдущей задачи видно, что если в треугольник вписана коника, то ее фокусы изогонально сопряжены (почему?!). Докажите обратное утверждение.
6. Найдите ГМТ точек, из которых эллипс виден под прямым углом.
7. Пусть вокруг параболы описан треугольник ABC . Оказывается, что
 - (a) фокус этой параболы лежит на описанной окружности треугольника ABC .
 - (b) ортоцентр треугольника ABC лежит на директрисе параболы.
8. По двум прямым дорогам с постоянными скоростями идут два пешехода. Докажите, что соединяющая их прямая все время касается некоторой параболы (дороги не параллельны, и через точку пересечения дорог пешеходы проходят не одновременно).