Матанская весна. День 1.

группа 10-2

16.03.17

Определение. *Точной верхней гранью* или *супремумом* некоторого множества $A \subset F$ называется число m с такими свойствами:

- $x \in A \Rightarrow x \leq m$.
- Если для некоторого числа n и всех x в множестве A выполнено $x \leq n$, то $m \leq n$.

1. Рассмотрим множество $A = \{x \in \mathbb{Q} \,|\, x \leq \sqrt{2}\}$. A является подмножеством $\mathbb{Q}$. Докажите, что оно ограничено сверху, но не имеет точной верхней грани.

Определение. *Полем вещественных чисел* называется упорядоченное поле, любое непустое ограниченное сверху подмножество которого имеет точную верхнюю грань.

Возможно это определение кажется Вам довольно странным. Из него не очевидно ни существование такого объекта, ни его единственность (в каком смысле, кстати?). Тем не менее это одно из возможных определений именно тех самых вещественных чисел, с которыми мы привыкли иметь дело. Доказывать это мы не будем.

2. Докажите, что супремум может быть только один.

3. Дайте определение точной нижней грани (*инфимум*) и докажите, что она тоже всегда существует.

Определение. Число A называется *пределом* последовательности $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, если выполняется следующее условие:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \; \forall n > N \; |a_n - a| < \varepsilon.$$

Это обозначают как $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$ или просто $a_n \to a$. Если последовательность имеет предел, то про нее говорят также, что она *сходится*.

4. Найдите предел последовательности

- $1, 1, 1, 1, \ldots$.
- $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$.

5.
- Докажите, что если последовательность имеет предел, то она ограничена (и сверху и снизу).
- Докажите, что последовательность не может иметь два различных предела.
- Приведите пример последовательности, не имеющей предела.

6.
- Докажите **теорему Вейерштрасса**: возрастающая и ограниченная сверху последовательность имеет предел.
- Докажите, что последовательность $a_n = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{n^2}$ имеет предел.

7. Известно, что $a_n \to a$, $b_n \to b$. Докажите свойства:

- $a_n + b_n \to a + b$
- $ca_n \to ca$ (c — постоянная).
- $a_n b_n \to ab$
- $\frac{a_n}{b_n} \to \frac{a}{b}$ кроме случая …(заполните пропуск самостоятельно).

8. Докажите *теорему о двух милиционерах*: если $x_n \le y_n \le z_n$ при всех n и $x_n, z_n \to A$, то и $y_n \to A$.

9. Докажите, что $\frac{\sin n^2 + \cos n^3 + 12}{n} \to 0$.

Определение. Последовательность a_n называется *фундаментальной* или *сходящейся в себе*, если выполнено следующее условие:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \ \forall m, n > N \ |a_m - a_n| < \varepsilon.$$

10.
- Докажите, что сходящаяся последовательность — фундаментальна.
- Приведите пример фундаментальной последовательности рациональных чисел, не имеющей рационального предела.
- Здесь и далее a_n фундаментальна. Докажите, что a_n ограничена (и сверху и снизу).

11. Последовательность задана по правилу $a_1 = 1, a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$. Докажите, что последовательность имеет предел и найдите его.

12. Докажите, что $a^n \to 0$ при $0 < a < 1$ и a^n неограничена при $a > 1$.

13. (**метод Герона**) Приближенное извлечение квадратного корня из числа x осуществляется так: выбираем начальное приближение $a_1 \approx \sqrt{x}$ и строим последовательность $a_{n+1} = \frac{a_n + \frac{x}{a_n}}{2}$. Докажите, что при правильном выборе начального приближения (каком?) $a_n \to \sqrt{x}$. Примените метод Герона для вычисления $\sqrt{10}$ с точностью до трех знаков после запятой.

14. Назовем n-значное число *хорошим*, если оно равно сумме n-ых степеней своих цифр (десятичной записи). Конечно ли количество хороших чисел?

15.
- Разложите выражение $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ по биному.
- Докажите, что последовательность $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ возрастает.
- Докажите, что эта последовательность имеет предел (Он обычно обозначается буквой e).