

Разнойбой по комбинаторике

группа 10-2

06.03.17

1. В комнате находятся 100 человек, каждый из которых либо рыцарь, который всегда говорит правду, либо лжец, который всегда лжёт, причём все они разного роста. Каждый из находящихся в комнате сказал одну из двух фраз: «Хотя бы пятеро лжецов ниже меня»; «Хотя бы пятеро лжецов выше меня». Сколько лжецов может быть в комнате? Приведите все варианты и докажите, что других нет.
2. В варианте олимпиады 15 задач, каждая оценивается в 7 баллов. По результатам проверки все участники набрали разное число баллов. Члены оргкомитета втихаря исправили оценки 0 на 6, 1 на 7. В результате этого участники упорядочились в точности в обратном порядке. Какое наибольшее количество участников могло быть? Приведите пример и докажите, что большее число участников невозможно.
3. Петя и Вася играют в игру на клетчатой полосе 1×2017 . Ходят по очереди, начинает Петя. За один ход можно закрасить две соседние незакрашенные клетки. Также один раз за игру (один раз на двоих) можно закрасить ровно одну крайнюю клетку, если она не закрашена. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто из мальчиков выиграет при правильной игре?
4. Есть таблица 15×100 (15 столбцов, 100 строк). В каждой строке в каких-то двух клетках стоит фишка. Каждая следующая строка отличается от предыдущей положением ровно одной фишки: та сдвигается либо вправо, либо влево на одну клетку. Докажите, что есть две строки, в которых фишки стоят на одинаковых позициях.
5. В каждой клетке квадрата $n \times n$ провели две диагонали, в результате чего квадрат оказался разбит на $4n^2$ треугольников. Все треугольники покрасили в черный или белый цвет, так что при этом каждый белый треугольник имеет общую сторону хотя бы с одним черным. Какое наименьшее количество черных треугольников могло быть в такой раскраске?
6. В кружке 49 учеников. Известно, что если трое кружковцев попарно незнакомы друг с другом, то какие-то двое из них имеют в кружке общего знакомого. Докажите, что кто-то из учеников имеет в кружке хотя бы 6 знакомых.