Многочлены

группа 10-2

19.01.2017

1. Числа x, y, z удовлетворяют равенству $x + y + z - 2(xy + yz + xz) + 4xyz = \frac{1}{2}$. Докажите, что хотя бы одно из них равно $\frac{1}{2}$.

2. Уравнение $x^n + a_1 x_{n-1} + \cdots + a^{n-1} x + a_n = 0$ с целыми ненулевыми коэффициентами имеет n различных целых корней. Докажите, что если каждые два корня взаимно просты, то и числа a_{n-1} и a_n взаимно просты.

3. Даны такие действительные числа $a_1 \le a_2 \le a_3$ и $b_1 \le b_2 \le b_3$, что

$$a_1 + a_2 + a_3 = b_1 + b_2 + b_3, a_1 a_2 + a_2 a_3 + a_1 a_3 = b_1 b_2 + b_2 b_3 + b_1 b_3.$$

Докажите, что если $a_1 \le b_1$, то $a_3 \le b_3$.

4. Приведенные квадратные трёхчлены $f(x)$ и $g(x)$ таковы, что уравнения $f(g(x)) = 0$ и $g(f(x)) = 0$ не имеют вещественных корней. Докажите, что хотя бы одно из уравнений $f(f(x)) = 0$ и $g(g(x)) = 0$ тоже не имеет вещественных корней.

5. Уравнение с целыми коэффициентами $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ имеет четыре положительных корня с учетом кратности. Найдите наименьшее возможное значение коэффициента b при этих условиях.

6. На доске написано несколько приведённых многочленов 37-й степени, все коэффициенты которых неотрицательны. Разрешается выбрать любые два выписанных многочлена f и g и заменить их на такие два приведённых многочлена 37-й степени f_1 и g_1, что $f + g = f_1 + g_1$ или $fg = f_1 g_1$. Докажите, что после применения любого конечного числа таких операций не может оказаться, что каждый многочлен на доске имеет 37 различных положительных корней.