Теория чисел

группа 10-2

16.01.2017

1. Натуральные числа n и k $(n > k)$ таковы, что число $\dfrac{n!}{k!}$ оканчивается на 2017. Докажите, что число n также оканчивается на 2017.

2. Множество S состоит из чисел $1,\ 1+b,\ 1+b+b^2,\ \ldots$, где b — некоторое натуральное число. Докажите, что если два числа из S являются членами возрастающей арифметической прогрессии, то найдётся ещё одно число из S, также являющееся членом этой прогрессии.

3. Натуральное число n обладает следующим свойством: для любых натуральных чисел a и b число $(a+b)^n - a^n - b^n$ делится на n. Докажите, что $a^n - a$ делится на n для любого натурального a.

4. Найдите все такие пары натуральных чисел n, k, что $n > 1$, k — нечётно и $(n-1)! + 1 = n^k$.

5. Каждое из натуральных чисел n, $n+1$ и $n+2$ делится на квадрат любого своего простого делителя. Докажите, что число n делится на куб некоторого своего простого делителя.

6. Робот загадал натуральное число от 1 до 2017. По нашей просьбе он может проделывать следующие операции:

- увеличить число в памяти на 1;
- уменьшить число в памяти на 1;
- сказать, является ли число в памяти точным квадратом.

Докажите, что не более чем за 300 операций мы можем узнать, какое число загадал робот.

7. Пусть a и b — различные натуральные числа, большие $1\,000\,000$, и такие, что $(a+b)^3$ делится на ab. Докажите, что $|a-b| > 2017$.

8. На доске написаны натуральные числа 1, 2, 3, …, 10. Разрешается выписать число a^2, если на доске уже имеется число a, или выписать наименьшее общее кратное чисел a и b, записанных на доске. Можно ли с помощью таких операций получить число $1\,000\,000$?