

# Геометрия

группа 10-2

12.01.2017

1. В каждой вершине куба сидело по мухе. Потом все мухи разом взлетели и сели по одной в каждую вершину в каком-то другом порядке. Докажите, что найдутся три мухи, которые в начальном и конечном положении сидели в вершинах равных треугольников.
2. В треугольнике  $ABC$   $AA_1$  и  $BB_1$  — высоты. На стороне  $AB$  выбраны точки  $M$  и  $K$  так, что  $B_1K \parallel BC$  и  $MA_1 \parallel AC$ . Докажите, что  $\angle AA_1K = \angle BB_1M$ .
3. В четырёхугольнике  $ABCD$  углы  $B$  и  $D$  прямые. Точки  $K$  и  $M$  — проекции вершин  $A$  и  $C$  соответственно на прямую  $BD$ . Через точку  $K$  проведена прямая, параллельная  $BC$  и пересекающая  $AC$  в точке  $P$ . Докажите, что угол  $KPM$  — прямой.
4. Окружность пересекает каждую сторону ромба в двух точках и делит её на три отрезка. Обойдём контур ромба, начав с какой-нибудь вершины, по часовой стрелке, и покрасим три отрезка каждой стороны последовательно в красный, белый и синий цвета. Докажите, что сумма длин красных отрезков равна сумме длин синих.
5. Диагонали вписанного четырёхугольника  $ABCD$  пересекаются в точке  $P$ . Пусть  $K, L, M, N$  — середины соответственно сторон  $AB, BC, CD, AD$ . Докажите, что радиусы описанных окружностей треугольников  $PKL, PLM, PMN$  и  $PNK$  равны.
6. На сторонах четырёхугольника  $ABCD$  с перпендикулярными диагоналями во внешнюю сторону построены подобные треугольники  $ABM, CBP, CDL$  и  $ADK$  (соседние ориентированы по-разному). Докажите, что  $PK = ML$ .