

## Неравенства

группа 10-2

15.12.16

1. Положительные  $x_1, x_2, \dots, x_n$  таковы, что  $x_1 x_2 \dots x_n = 1$ .  
Покажите, что

$$(1 + x_1)(1 + x_2) \dots (1 + x_n) \geq 2^n.$$

2. Пусть  $1 \geq x_1, \dots, x_n \geq 0$ , докажите неравенство

$$\frac{1}{1 + x_1} + \frac{1}{1 + x_2} + \dots + \frac{1}{1 + x_n} \leq \frac{n}{1 + \sqrt[n]{x_1 \dots x_n}}.$$

3. (ИМО 1984) Для положительных  $x, y, z$  таких, что  $x + y + z = 1$  докажите неравенство  $0 \leq xy + yz + zx - 2xyz \leq \frac{7}{27}$ .

4. Для положительных  $a, b, c, d$  докажите неравенство:

$$\sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}{4}} \geq \sqrt[3]{\frac{abc + bcd + cda + dab}{4}}.$$

5. Произведение положительных чисел  $a, b, c$  равно 1. Докажите, что верно неравенство:

$$a^2 + b^2 + c^2 - 3 \geq 18(a + b + c - ab - bc - ca).$$

6. (Беларусь, отбор на ИМО 2014) Для положительных  $a, b, c$  покажите, что выполнено неравенство

$$(a + b + c)^5 \geq 81abc(a^2 + b^2 + c^2).$$

7. (Канада) Для неотрицательных  $a, b, c$  верно, что  $a + b + c = 3$ .  
Докажите, что  $a^2 b + b^2 c + c^2 a \leq 4$ .

## Неравенства

группа 10-2

15.12.16

1. Положительные  $x_1, x_2, \dots, x_n$  таковы, что  $x_1 x_2 \dots x_n = 1$ .  
Покажите, что

$$(1 + x_1)(1 + x_2) \dots (1 + x_n) \geq 2^n.$$

2. Пусть  $1 \geq x_1, \dots, x_n \geq 0$ , докажите неравенство

$$\frac{1}{1 + x_1} + \frac{1}{1 + x_2} + \dots + \frac{1}{1 + x_n} \leq \frac{n}{1 + \sqrt[n]{x_1 \dots x_n}}.$$

3. (ИМО 1984) Для положительных  $x, y, z$  таких, что  $x + y + z = 1$  докажите неравенство  $0 \leq xy + yz + zx - 2xyz \leq \frac{7}{27}$ .

4. Для положительных  $a, b, c, d$  докажите неравенство:

$$\sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}{4}} \geq \sqrt[3]{\frac{abc + bcd + cda + dab}{4}}.$$

5. Произведение положительных чисел  $a, b, c$  равно 1. Докажите, что верно неравенство:

$$a^2 + b^2 + c^2 - 3 \geq 18(a + b + c - ab - bc - ca).$$

6. (Беларусь, отбор на ИМО 2014) Для положительных  $a, b, c$  покажите, что выполнено неравенство

$$(a + b + c)^5 \geq 81abc(a^2 + b^2 + c^2).$$

7. (Канада) Для неотрицательных  $a, b, c$  верно, что  $a + b + c = 3$ .  
Докажите, что  $a^2 b + b^2 c + c^2 a \leq 4$ .