

Неравенства

группа 10-2

08.12.16

1. Для любых a, b, c докажите неравенство

$$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \geqslant abc(a + b + c).$$

2. Неотрицательные a, b, c таковы, что $a + b + c = 2$. Докажите неравенство $abc \geqslant 8(1 - a)(1 - b)(1 - c)$.

3. (а) (Несбитт) Для $a, b, c > 0$ докажите, что

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geqslant \frac{3}{2}.$$

- (б) Пусть $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$ ($n \geqslant 2$) Покажите, что

$$\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{s - a_i} \geqslant \frac{n}{n-1},$$

где $s = a_1 + a_2 + \dots + a_n$.

4. (а) Пусть a, b, c положительны, докажите, что

$$\frac{a_1^2}{b_1} + \dots + \frac{a_n^2}{b_n} \geqslant \frac{(a_1 + \dots + a_n)^2}{b_1 + \dots + b_n}.$$

- (б) Пусть a, b, c положительны, докажите, что

$$a^3b + b^3c + c^3a \geqslant abc(a + b + c).$$

5. Известно, что $x^2 + y^2 + z^2 = 3$. Покажите, что $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geqslant x + y + z$.

Неравенства

группа 10-2

08.12.16

1. Для любых a, b, c докажите неравенство

$$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \geqslant abc(a + b + c).$$

2. Неотрицательные a, b, c таковы, что $a + b + c = 2$. Докажите неравенство $abc \geqslant 8(1 - a)(1 - b)(1 - c)$.

3. (а) (Несбитт) Для $a, b, c > 0$ докажите, что

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geqslant \frac{3}{2}.$$

- (б) Пусть $a_1, a_2, \dots, a_n > 0$ ($n \geqslant 2$) Покажите, что

$$\sum_{i=1}^n \frac{a_i}{s - a_i} \geqslant \frac{n}{n-1},$$

где $s = a_1 + a_2 + \dots + a_n$.

4. (а) Пусть a, b, c положительны, докажите, что

$$\frac{a_1^2}{b_1} + \dots + \frac{a_n^2}{b_n} \geqslant \frac{(a_1 + \dots + a_n)^2}{b_1 + \dots + b_n}.$$

- (б) Пусть a, b, c положительны, докажите, что

$$a^3b + b^3c + c^3a \geqslant abc(a + b + c).$$

5. Известно, что $x^2 + y^2 + z^2 = 3$. Покажите, что $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geqslant x + y + z$.