

Немного площади

группа 10-2

01.12.16

1. Из середины каждой стороны остроугольного треугольника опущены перпендикуляры на две другие стороны. Докажите, что площадь ограниченного ими шестиугольника равна половине площади треугольника.
2. Пусть M и N – середины противоположных сторон BC и AD выпуклого четырехугольника $ABCD$, отрезки AM и BN пересекаются в точке P , а отрезки DM и CN – в точке Q . Докажите, что сумма площадей треугольников APB и CQD равна площади четырехугольника $MPNQ$.
3. К двум непересекающимся окружностям ω_1 и ω_2 проведены три общие касательные – две внешние, a и b , и одна внутренняя, c . Прямые a, b и c касаются окружности ω_1 в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно, а окружности ω_2 – в точках A_2, B_2 и C_2 соответственно. Докажите, что отношение площадей треугольников $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ равно отношению радиусов окружностей ω_1 и ω_2 .
4. На сторонах AB, BC и CA произвольного треугольника ABC взяты точки C_1, A_1 и B_1 соответственно. Обозначим через S_1, S_2 и S_3 площади треугольников AB_1C_1, BA_1C_1 и CA_1B_1 соответственно. Докажите, что

$$\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3} \leq \frac{3}{2} \sqrt{S_{ABC}}$$

5. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ лучи AB и DC пересекаются в точке K . На биссектрисе угла AKD нашлась точка P такая, что прямые BP и CP делят пополам отрезки AC и BD соответственно. Докажите, что $AB = CD$.
6. На сторонах BC и DC параллелограмма $ABCD$ выбраны точки D_1 и B_1 так, что $BD_1 = DB_1$. Отрезки BB_1 и DD_1 пересекаются в точке Q . Докажите, что AQ – биссектриса угла BAD .
7. (а) Через точку X , лежащую внутри параллелограмма, проведены прямые, параллельные его сторонам. Тогда два образовавшихся при этом параллелограмма с единственной общей вершиной X равновелики тогда и только тогда, когда точка X лежит на диагонали параллелограмма.
(б) Через точку L , взятую внутри параллелограмма $ABCD$, проведены прямые, параллельные его сторонам и пересекающие стороны AB и CD соответственно в точках K и G , а стороны BC и AD соответственно в точках F и M . Докажите, что прямые BM, KD и CL пересекаются в одной точке.
(с) Сделайте гомотегию с центром в A и коэффициентом $\frac{1}{2}$. Что-то знакомое?