Квадратичные вычеты 2

группа 10-2

20.11.16

1. **(Spain National Mathematical Olympiad 2016)** Дано простое число p. Докажите, что существует натуральное число α такое, что $p|\alpha(\alpha-1)+3$ тогда и только тогда, когда существует натуральное β такое, что $p|\beta(\beta-1)+25$.

2. Решите сравнение $ax^2+bxy+cy^2 \equiv 0\ (mod\ p)$, где $a \not\equiv 0\ (mod\ p)$.

3. Последняя цифра числа x^2+xy+y^2 равна нулю. Докажите, что две последние цифры этого числа равны нулю.

4. Докажите, что при натуральных $x, y > 2$ выражение $\frac{x^2+1}{y^2-5}$ не может принимать целые значения.

5. Пусть F_n — n-ое число Фибоначчи. Докажите, что $F_p - (\frac{5}{p})$ делится на p при всех простых $p > 5$.

   Стоит вспомнить формулу Бине для чисел Фибоначчи: $F_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$

6. Решите уравнение $x^2 = y^3 - 5$.

7. **(a)** Докажите, что уравнение $4xy - x - y = z^2$ не имеет решений в натуральных числах.

   (b) Докажите, что оно имеет бесконечно много решений в целых числах.