Инверсия

группа 10-2

14.11.16

Определение. Рассмотрим окружность ω с центром в точке O и радиусом R.
Инверсией относительно ω называется отображение плоскости, дополненной бесконечно удаленной точкой, в себя, переводящее каждую точку P в такую точку P', лежащую на луче OP, что $OP \cdot OP' = R^2$. (Будем считать, что при инверсии точка O переходит в бесконечно удаленную точку, а бесконечно удаленная точка в точку O)

Считается, что бесконечно удаленная точка принадлежит всем прямым плоскости.

1. Пусть при инверсии с центром O и радиусом R точка A переходит в A', а точка B в B'. Докажите, что
(a) треугольники OAB и $OB'A'$ подобны;
(b) $A'B' = AB \cdot \frac{R^2}{OA \cdot OB}$.

2. Докажите, что при инверсии
(a) прямая, проходящая через центр инверсии, переходит сама в себя;
(b) прямая, не проходящая через центр инверсии, переходит в окружность, проходящую через центр инверсии;
(c) окружность, проходящая через центр инверсии, переходит в прямую, не проходящую через центр инверсии;
(d) окружность, не проходящая через центр инверсии, переходит в окружность, не проходящую через центр инверсии.

Определение. *Обобщенной окружностью* будем называть окружность или прямую (с бесконечно удаленной точкой).

Пусть две обобщенные окружности пересекаются в точке X. Тогда будем считать, что угол между ними равен углу между касательными к ним в точке X.

3. **(a)** Докажите, что инверсия сохраняет касание обобщенных окружностей.[1]
(b) Докажите, что угол между обобщенными окружностями сохраняется.

4. Во что переходит неравенство треугольника при инверсии?

5. В сегмент вписываются всевозможные пары касающихся окружностей. Найдите ГМТ их точек касания

6. Окружности $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ таковы, что ω_1 и ω_3 касаются каждой из окружностей ω_2 и ω_4 . Докажите, что точки касания лежат на одной обобщенной окружности.

7. Докажите, что угол между обобщенными описанными окружностями треугольников ABC и ABD равен тому же углу для треугольников ACD и BCD.

8. В окружности Ω проведен диаметр PQ. Окружность ω вписана в получившийся сегмент и касается PQ в точке C. Пусть AB — касательная к ω, перпендикулярная PQ, пересекающая Ω в точке A и отрезок CQ в точек B. Докажите, что AC является биссектрисой $\angle PAB$.

9. Пусть M, N и K — точки касания вписанной окружности треугольника ABC его сторон. Точка Q — центр окружности, проходящей через середины отрезков MN, NK и KM. Докажите, что точка Q, центр описанной окружности и центр вписанной окружности треугольника лежат на одной прямой.

10. Пусть p – полупериметр треугольника ABC. Отметим на стороне AC такие точки P и Q, что $BP = BQ = p$. Докажите, что окружность, описанная вокруг треугольника BPQ касается вневписанной окружности, соответствующей вершине B.

11. Дан треугольник ABC и точка P внутри такая, что $\angle APB - \angle C = \angle APC - \angle B$. Докажите, что биссектрисы углов ABP и ACP пересекаются на прямой AP.

[1]Какие прямые можно назвать касающимися?