

# Раскраски

группа 10-2

10.11.16

**Соглашение.** Если в задаче говорится, что плоскость (пространство, прямая и т. п.) окрашена в  $n$  цветов, то имеется ввиду, что каждая точка окрашена в один из  $n$  цветов, причём каждым из этих  $n$  цветов окрашена хотя бы одна точка плоскости (пространства, прямой и т. п.).

1. Плоскость (соответственно пространство) окрашена в два (соответственно в три) цвета. Докажите, что найдутся две точки  
(а) одного цвета,  
(б) разных цветов,  
расстояние между которыми равно 1.
2. Прямая окрашена в два цвета. Докажите, что найдётся отрезок, оба конца и середина которого окрашены в один и тот же цвет.
3. (а) Можно ли раскрасить плоскость (соответственно пространство) в три (соответственно в четыре) цвета так, чтобы любая прямая (соответственно плоскость) оказалась окрашена ровно в два (соответственно ровно в три) цвета?  
(б) Тот же вопрос, если требуется, чтобы любые две точки, расстояние между которыми равно 1, оказались окрашенными в разные цвета?
4. (а) Плоскость окрашена в два цвета.  
(б) Плоскость окрашена в  $n$  цветов.  
Докажите, что найдется прямоугольник вершины которого окрашены в один цвет.
5. Плоскость окрашена в три цвета. Докажите, что найдется прямоугольный треугольник с вершинами трех разных цветов.
6. Плоскость (соответственно пространство) окрашена в три (соответственно в четыре) цвета. Докажите, что найдутся две точки одного цвета, расстояние между которыми равно 1.
7. Раскрасьте плоскость в семь цветов так, чтобы любые две точки, расстояние между которыми равно 1, оказались окрашенными в разные цвета.
8. Плоскость окрашена в два цвета: красный и синий. Докажите, что либо для любого положительного  $l$  найдется отрезок длины  $l$  с синими концами, либо для любого треугольника найдется равный ему треугольник с красными вершинами (либо и то и другое).
9. Пространство окрашено в пять цветов. Докажите, что найдется  
(а) плоскость, окрашенная не менее, чем в 4 цвета.  
(б) прямая, окрашенная не менее, чем в 3 цвета.