

## Старая добрая непрерывность

группа 10-2  
27.10.16

**Определение.** Функция  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  непрерывна в точке  $x_0 \in [a, b]$ , если  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$  такое, что  $\forall x \in [a, b], |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ .  
Функция непрерывна на отрезке, если она непрерывна во всех точках отрезка.

**(Теорема о промежуточном значении)** Непрерывная на отрезке  $[a, b]$  функция  $f$  принимает на этом отрезке все значения между  $f(a)$  и  $f(b)$ .

1. Монах с 8 часов утра до 8 часов вечера поднимался на священную гору. Ночь он провел в молитвах, а на следующий день спустился с горы с 8 утра до 8 вечера по той же дороге. Скорость его оба раза вовсе не была постоянной, иногда он отдыхал, мог и возвращаться за забытой на предыдущем привале вещью. Докажите, что в каком-то месте дороге он в первый и во второй день был ровно в одно и то же время.
2. Докажите, что для любого многоугольника существует прямая заданного направления, делящая его площадь пополам. Единственна ли такая прямая?
3. (а) Дан выпуклый многоугольник и точка вне его. Докажите, что существует прямая, проходящая через точку и делящая площадь многоугольника пополам. Единственна ли такая прямая?  
*Вкусный блин можно разрезать на две части равной площади.*  
(б) Решите ту же задачу для случая невыпуклых многоугольников.  
(с) Та же задача, но точка лежит *внутри* выпуклого многоугольника.
4. **(Теорема Борсука-Улама для окружности).** Пусть имеется непрерывная на окружности функция. Тогда найдется пара диаметрально противоположных точек, в которых функция принимает одинаковые значения.
5. Для любого выпуклого многоугольника существует прямая, делящая пополам и площадь, и периметр.
6. Для любого выпуклого многоугольника существуют две перпендикулярные прямые, делящие ее на четыре части одинаковой площади.
7. Если имеются два выпуклых многоугольника, то существует прямая, делящая каждый из них на части равной площади.  
*Бутерброд состоит из хлеба и колбасы. Всегда существует разрез, который делит его на две равные части.*
8. По кругу лежат 99 ящиков, в ящиках лежат яблоки и апельсины. Докажите, что можно так выбрать 50 подряд идущих ящиков, что в них окажется не менее половины всех яблок и не менее половины всех апельсинов.
9. У сыровара Джонни есть 2016 кусков сыра разного веса и разной цены за килограмм. Докажите, что Джонни может разрезать не более двух кусков на две части так, чтобы отдать своей возлюбленной Бонни половину сыра, как по массе, так и по стоимости.

## Старая добрая непрерывность

группа 10-2  
27.10.16

**Определение.** Функция  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  непрерывна в точке  $x_0 \in [a, b]$ , если  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$  такое, что  $\forall x \in [a, b], |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ .  
Функция непрерывна на отрезке, если она непрерывна во всех точках отрезка.

**(Теорема о промежуточном значении)** Непрерывная на отрезке  $[a, b]$  функция  $f$  принимает на этом отрезке все значения между  $f(a)$  и  $f(b)$ .

1. Монах с 8 часов утра до 8 часов вечера поднимался на священную гору. Ночь он провел в молитвах, а на следующий день спустился с горы с 8 утра до 8 вечера по той же дороге. Скорость его оба раза вовсе не была постоянной, иногда он отдыхал, мог и возвращаться за забытой на предыдущем привале вещью. Докажите, что в каком-то месте дороге он в первый и во второй день был ровно в одно и то же время.
2. Докажите, что для любого многоугольника существует прямая заданного направления, делящая его площадь пополам. Единственна ли такая прямая?
3. (а) Дан выпуклый многоугольник и точка вне его. Докажите, что существует прямая, проходящая через точку и делящая площадь многоугольника пополам. Единственна ли такая прямая?  
*Вкусный блин можно разрезать на две части равной площади.*  
(б) Решите ту же задачу для случая невыпуклых многоугольников.  
(с) Та же задача, но точка лежит *внутри* выпуклого многоугольника.
4. **(Теорема Борсука-Улама для окружности).** Пусть имеется непрерывная на окружности функция. Тогда найдется пара диаметрально противоположных точек, в которых функция принимает одинаковые значения.
5. Для любого выпуклого многоугольника существует прямая, делящая пополам и площадь, и периметр.
6. Для любого выпуклого многоугольника существуют две перпендикулярные прямые, делящие ее на четыре части одинаковой площади.
7. Если имеются два выпуклых многоугольника, то существует прямая, делящая каждый из них на части равной площади.  
*Бутерброд состоит из хлеба и колбасы. Всегда существует разрез, который делит его на две равные части.*
8. По кругу лежат 99 ящиков, в ящиках лежат яблоки и апельсины. Докажите, что можно так выбрать 50 подряд идущих ящиков, что в них окажется не менее половины всех яблок и не менее половины всех апельсинов.
9. У сыровара Джонни есть 2016 кусков сыра разного веса и разной цены за килограмм. Докажите, что Джонни может разрезать не более двух кусков на две части так, чтобы отдать своей возлюбленной Бонни половину сыра, как по массе, так и по стоимости.