Дискретная непрерывность

группа 10-2

24.10.16

1. Вася выписывает натуральные числа, первое из которых равно 1. Каждое следующее число или на 1 больше предыдущего, или является собственным делителем предыдущего. Последнее равно 1000. Докажите, что в строке найдется число 179.

2. Шеренга новобранцев стояла лицом к сержанту. По команде «налево» некоторые повернулись налево, некоторые – направо, а остальные – кругом. Всегда ли сержант сможет встать в строй так, чтобы с обеих сторон от него оказалось поровну новобранцев, стоящих к нему лицом?

3. На плоскости нарисовано n красных и n синих точек общего положения. Всегда ли можно провести прямую так, чтобы с каждой стороны лежало поровну красных и синих точек?

4. В стране человек считается богатым, если его зарплата больше зарплаты премьер-министра. В этой стране богатые мужчины предпочитают жениться на бедных женщинах. Все зарплаты в стране различные. Докажите, что можно премьер-министру установить такую зарплату, чтобы количество богатых мужчин было в точности равно количеству бедных женщин.

5. Существуют ли сто последовательных натуральных чисел, среди которых ровно пять простых?

6. На бесконечной шахматной доске стоят две белые ладьи и невидимый черный король. Ходят по очереди. Докажите, что ладьи смогут поставить шах, если
(a) известно, что король может дойти до одной ладьи (известно, какой) за 100 ходов.
(b) про местоположение короля ничего не известно.

7. Грани восьми единичных кубиков окрашены в чёрный и белый цвета так, что чёрных и белых граней поровну. Докажите, что из этих кубиков можно сложить куб со стороной 2, на поверхности которого чёрных и белых квадратиков поровну.

8. В круге проведены несколько хорд так, что любые две из них пересекаются внутри круга. Докажите, что можно пересечь все хорды одним диаметром.

9. В бесконечной последовательности $a_1, a_2, a_3, \ldots$ число a_1 равно 1, а каждое следующее число a_n строится из предыдущего a_{n-1} по правилу: если у числа n наибольший нечётный делитель имеет остаток 1 от деления на 4, то $a_n = a_{n-1} + 1$, если же остаток равен 3, то $a_n = a_{n-1} - 1$. Докажите, что в этой последовательности
(a) число 1 встречается бесконечно много раз;
(b) каждое натуральное число встречается бесконечно много раз.

Дискретная непрерывность

группа 10-2

24.10.16

1. Вася выписывает натуральные числа, первое из которых равно 1. Каждое следующее число или на 1 больше предыдущего, или является собственным делителем предыдущего. Последнее равно 1000. Докажите, что в строке найдется число 179.

2. Шеренга новобранцев стояла лицом к сержанту. По команде «налево» некоторые повернулись налево, некоторые – направо, а остальные – кругом. Всегда ли сержант сможет встать в строй так, чтобы с обеих сторон от него оказалось поровну новобранцев, стоящих к нему лицом?

3. На плоскости нарисовано n красных и n синих точек общего положения. Всегда ли можно провести прямую так, чтобы с каждой стороны лежало поровну красных и синих точек?

4. В стране человек считается богатым, если его зарплата больше зарплаты премьер-министра. В этой стране богатые мужчины предпочитают жениться на бедных женщинах. Все зарплаты в стране различные. Докажите, что можно премьер-министру установить такую зарплату, чтобы количество богатых мужчин было в точности равно количеству бедных женщин.

5. Существуют ли сто последовательных натуральных чисел, среди которых ровно пять простых?

6. На бесконечной шахматной доске стоят две белые ладьи и невидимый черный король. Ходят по очереди. Докажите, что ладьи смогут поставить шах, если
(a) известно, что король может дойти до одной ладьи (известно, какой) за 100 ходов.
(b) про местоположение короля ничего не известно.

7. Грани восьми единичных кубиков окрашены в чёрный и белый цвета так, что чёрных и белых граней поровну. Докажите, что из этих кубиков можно сложить куб со стороной 2, на поверхности которого чёрных и белых квадратиков поровну.

8. В круге проведены несколько хорд так, что любые две из них пересекаются внутри круга. Докажите, что можно пересечь все хорды одним диаметром.

9. В бесконечной последовательности $a_1, a_2, a_3, \ldots$ число a_1 равно 1, а каждое следующее число a_n строится из предыдущего a_{n-1} по правилу: если у числа n наибольший нечётный делитель имеет остаток 1 от деления на 4, то $a_n = a_{n-1} + 1$, если же остаток равен 3, то $a_n = a_{n-1} - 1$. Докажите, что в этой последовательности
(a) число 1 встречается бесконечно много раз;
(b) каждое натуральное число встречается бесконечно много раз.