

Принцип Дирихле в геометрии

группа 10-2

10.10.16

1. Внутри правильного треугольника со стороной 1 расположено 5 точек. Докажите, что среди них найдутся две, расстояние между которыми меньше, чем $\frac{1}{2}$.
2. Узлы бесконечной клетчатой бумаги раскрашены в p цветов. Докажите, что существуют m горизонтальных и n вертикальных прямых, на пересечении которых лежат точки одного цвета.
(a) $p = 2$, $n = m = 2$.
(b) n, m и p – произвольные натуральные числа.
3. В квадрате со стороной 1 находится 51 точка. Докажите, что какие-то 3 из них можно накрыть кругом радиуса $\frac{1}{7}$.
4. На столе из спичек длины 1 выложен правильный треугольник со стороной 2016, разбитый на правильные треугольники со стороной 1 прямыми, параллельными сторонам треугольника. Какое минимальное количество спичек нужно убрать, чтобы на столе не осталось ни одного правильного треугольника со стороной один?
5. Каждый день Фрекен Бок испекает квадратный торт размером 3×3 . Карлсон немедленно вырезает себе из него четыре квадратных кусков размером 1×1 со сторонами, параллельными сторонам торта (не обязательно по линиям сетки 3×3). После этого Малыш вырезает себе из оставшейся части торта квадратный кусок со сторонами, также параллельными сторонам торта. На какой наибольший кусок торта может рассчитывать Малыш вне зависимости от действий Карлсона?
6. Каким наименьшим числом кругов радиуса 1 можно целиком накрыть круг радиуса 2?
7. Моток ниток проткнули насквозь 72 цилиндрическими спицами радиуса 1 каждая, в результате чего он приобрел форму цилиндра радиуса 6. Могла ли высота этого цилиндра оказаться также равной 6?
8. Внутри окружности радиуса n расположено $4n$ отрезков длиной 1. Докажите, что можно провести прямую, параллельную или перпендикулярную данной прямой l и пересекающую по крайней мере два данных отрезка.
9. На плоскости нарисованы 100 кругов, любые два из которых имеют общую точку (возможно, граничную). Докажите, что найдётся точка, принадлежащая не менее, чем 15 кругам.