Числовые поля

группа 10-2

6.10.16

1. **(a)** Докажите, что число $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ иррационально.

(b) Докажите, что число $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$ иррационально.

2. **(a)** Докажите, что если число $a+b\sqrt{2}$, где $a,b\in\mathbb{Q}$, является корнем многочлена с целыми коэффициентами, то число $a-b\sqrt{2}$ является корнем того же многочлена.

(b) Число $1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}$ является корнем многочлена с целыми коэффициентами. Найдите ещё три числа, являющиеся корнями того же многочлена.

3. Придумайте многочлен с целыми коэффициентами, корнями которого были бы числа

(a) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$;

(b) $\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}$;

(c) $\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\sqrt[5]{5}$;

(d) $\sqrt{1}-\sqrt{2}+\sqrt{3}-\dots-\sqrt{2016}$;

(e) Докажите, что произведение всех чисел вида $\pm\sqrt{1}\pm\sqrt{2}\pm\sqrt{3}\pm\dots\pm\sqrt{2016}$ является целым числом.

Определение. Произвольное подполе поля комплексных чисел называется *числовым полем.*

Определение. Пусть $x_1,x_2,\dots,x_n$ — произвольные комплексные числа. Тогда минимальное по включению числовое поле, содержащее $x_1,x_2,\dots,x_n$ называется числовым полем, порождённым числами $x_1,x_2,\dots,x_n$ и обозначается $\mathbb{Q}[x_1,x_2,\dots,x_n]$.

4. **(a)** Докажите, что $\mathbb{Q}[\sqrt{10}]$ совпадает с множеством чисел вида $a+b\sqrt{10}$, где $a,b\in\mathbb{Q}$.

(b) Найдите аналогичную форму записи для чисел из $\mathbb{Q}[\sqrt{3},\sqrt{5}]$.

(c) Найдите аналогичную форму записи для чисел из $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{7}]$;

(d) Докажите, что $\mathbb{Q}[\sqrt{2},\sqrt{3}]$ и $\mathbb{Q}[\sqrt{2}+\sqrt{3}]$ — одно и то же числовое поле.

Числовые поля

группа 10-2

6.10.16

1. **(a)** Докажите, что число $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ иррационально.

(b) Докажите, что число $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$ иррационально.

2. **(a)** Докажите, что если число $a+b\sqrt{2}$, где $a,b\in\mathbb{Q}$, является корнем многочлена с целыми коэффициентами, то число $a-b\sqrt{2}$ является корнем того же многочлена.

(b) Число $1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}$ является корнем многочлена с целыми коэффициентами. Найдите ещё три числа, являющиеся корнями того же многочлена.

3. Придумайте многочлен с целыми коэффициентами, корнями которого были бы числа

(a) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$;

(b) $\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}$;

(c) $\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\sqrt[5]{5}$;

(d) $\sqrt{1}-\sqrt{2}+\sqrt{3}-\dots-\sqrt{2016}$;

(e) Докажите, что произведение всех чисел вида $\pm\sqrt{1}\pm\sqrt{2}\pm\sqrt{3}\pm\dots\pm\sqrt{2016}$ является целым числом.

Определение. Произвольное подполе поля комплексных чисел называется *числовым полем.*

Определение. Пусть $x_1,x_2,\dots,x_n$ — произвольные комплексные числа. Тогда минимальное по включению числовое поле, содержащее $x_1,x_2,\dots,x_n$ называется числовым полем, порождённым числами $x_1,x_2,\dots,x_n$ и обозначается $\mathbb{Q}[x_1,x_2,\dots,x_n]$.

4. **(a)** Докажите, что $\mathbb{Q}[\sqrt{10}]$ совпадает с множеством чисел вида $a+b\sqrt{10}$, где $a,b\in\mathbb{Q}$.

(b) Найдите аналогичную форму записи для чисел из $\mathbb{Q}[\sqrt{3},\sqrt{5}]$.

(c) Найдите аналогичную форму записи для чисел из $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{7}]$;

(d) Докажите, что $\mathbb{Q}[\sqrt{2},\sqrt{3}]$ и $\mathbb{Q}[\sqrt{2}+\sqrt{3}]$ — одно и то же числовое поле.