Поля

группа 10-2

3.10.16

Определение. Множество элементов F с введёнными на нём алгебраическими операциями сложения $+$ и умножения $*$ ($\forall a, b \in F \quad (a+b) \in F,\ a * b \in F$) называется *полем* $(F, +, *)$, если выполнены следующие аксиомы:

- Коммутативность сложения: $\forall a, b \in F \quad a + b = b + a$.
- Ассоциативность сложения: $\forall a, b, c \in F \quad (a+b)+c = a+(b+c)$.
- Существование нулевого элемента: $\exists 0 \in F\colon \forall a \in F \quad a + 0 = a$.
- Существование противоположного элемента: $\forall a \in F\ \exists (-a) \in F\colon a + (-a) = 0$.
- Коммутативность умножения: $\forall a, b \in F \quad a * b = b * a$.
- Ассоциативность умножения: $\forall a, b, c \in F \quad (a * b) * c = a * (b * c)$.
- Существование единичного элемента: $\exists 1 \in F\colon \forall a \in F \quad a * 1 = a$.
- Существование обратного элемента для ненулевых элементов: $(\forall a \in F\colon a \neq 0)\ \exists a^{-1} \in F\colon a * a^{-1} = 1$.
- Дистрибутивность умножения относительно сложения: $\forall a, b, c \in F \quad (a+b) * c = (a * c) + (b * c)$.

1. Являются ли полями следующие множества
(a) $(\mathbb{N}, +, *)$ натуральные числа, $(\mathbb{Z}, +, *)$ целые числа, $(\mathbb{Q}, +, *)$ рациональные числа, $(\mathbb{R}, +, *)$ действительные числа, $(\mathbb{C}, +, *)$ комплексные числа?

(b) Множества выражений вида
$(\{a\sqrt{2}, \text{где } a \in \mathbb{Q}\}, +, *)$,
$(\{a + b\sqrt{3}, \text{где } a, b \in \mathbb{Q}\}, +, *)$,
$(\{a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3}, \text{где } a, b \in \mathbb{Q}\}, +, *)$,
$(\{a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4}, \text{где } a, b \in \mathbb{Q}\}, +, *)$

(c) Множество вычетов по модулю n (обозначается Z_n)

Определение. Комплексное число α называется *алгебраическим*, если существует многочлен с рациональным коэффициентами такой, что α является его корнем. Числа, не являющиеся алгебраическими, называются *трансцендентными*.

(d) Множество алгебраических чисел (обозначается $\mathbb{A}$)?

2. **(a)** Докажите единственность существования 0 и 1 в произвольном поле.

(b) Докажите, что в любом поле выполняется: $0 * a = 0$.

(c) Докажите, что в любом поле выполняется: $-(a * b) = a * (-b)$.

(d) Пусть $a, b \in F$, где $(F, +, *)$ — поле. Оказалось, что $a * b = 0$. Докажите, что либо $a = 0$, либо $b = 0$. (это означает, что в поле отсутствуют так называемые *делители нуля*)

Определение. Непустое подмножество K поля F называется *подполем* F, если оно само является полем при тех же операциях сложения и умножения, которые заданы в поле F. Тогда F называется *расширением* поля K.

3. Докажите, что любое подполе $\mathbb{R}$ содержит $\mathbb{Q}$.

4. Докажите, что поле $\mathbb{Q}$ не имеет нетривиальных (то есть отличных от него самого) подполей.

Определение. *Характеристикой* поля F называется наименьшее натуральное число n, при котором $\underbrace{1+1+1+\ldots+1}_{n \text{ раз}} = 0$. Если такого натурального числа нет, то характеристика поля считается равной нулю.

Определение. *Конечным полем* называется поле из конечного числа элементов.

5. Докажите, что характеристика поля — либо 0, либо простое число.

6. Докажите, что характеристика конечных полей не может быть нулем.

7. Постройте поле из четырех элементов (напишите таблицы сложения и умножения).

8. Приведите пример бесконечного поля ненулевой характеристики.