# Геометрический разнобой

*группа 10-2*

*15.09.16*

**1.** В остроугольном треугольнике $ABC$ через центр $O$ описанной окружности и вершины $B$ и $C$ проведена окружность $S$. Пусть $OK$ – диаметр окружности $S$, $D$ и $E$ – соответственно точки её пересечения с прямыми $AB$ и $AC$. Докажите, что $ADKE$ – параллелограмм.

**2.** На стороне $AC$ остроугольного треугольника $ABC$ выбрана точка $D$. Медиана $AM$ пересекает высоту $CH$ и отрезок $BD$ в точках $N$ и $K$ соответственно. Докажите, что если $AK = BK$, то $AN = 2KM$.

**3.** (**Окружность Конвея**) На продолжении сторон $BA$ и $CA$ за точку $A$ отложим отрезки $AB_1$ и $AC_2$, равные стороне $BC$. Аналогично построим точки $B_2$ и $A_1$, $A_2$ и $C_1$. Докажите, что все построенные таким образом точки лежат на одной окружности.

**4.** Хорда $CD$ окружности с центром $O$ перпендикулярна ее диаметру $AB$, а хорда $AE$ делит пополам радиус $OC$. Докажите, что хорда $DE$ делит пополам хорду $BC$.

**5.** Обозначим точки касания вписанной и вневписанной окружностей со стороной $AC$ треугольника $ABC$ через $P$ и $Q$ соответственно. Докажите, что прямая $BQ$ проходит через точку диаметрально противоположную точке $P$ на вписанной окружности.

**6.** Две окружности пересекаются в точках $A$ и $B$. Через точку $A$ проведена прямая, вторично пересекающая первую окружность в точке $C$, а вторую – в точке $D$. Пусть $M$ и $N$ – середины дуг $BC$ и $BD$, не содержащих точку $A$, а $K$ – середина отрезка $CD$. Докажите, что угол $MKN$ прямой. (Можно считать, что точки $C$ и $D$ лежат по разные стороны от точки $A$.)

**7.** Пусть $H$ – ортоцентр остроугольного треугольника $ABC$. На сторонах $AB$ и $AC$ отметили точки $M$ и $N$ соответственно. Окружности с диаметрами $BN$ и $CM$ пересекаются в точках $P$ и $Q$. Доказать, что $P, Q$ и $H$ лежат на одной прямой.


# Геометрический разнобой

*группа 10-2*

*15.09.16*

**1.** В остроугольном треугольнике $ABC$ через центр $O$ описанной окружности и вершины $B$ и $C$ проведена окружность $S$. Пусть $OK$ – диаметр окружности $S$, $D$ и $E$ – соответственно точки её пересечения с прямыми $AB$ и $AC$. Докажите, что $ADKE$ – параллелограмм.

**2.** На стороне $AC$ остроугольного треугольника $ABC$ выбрана точка $D$. Медиана $AM$ пересекает высоту $CH$ и отрезок $BD$ в точках $N$ и $K$ соответственно. Докажите, что если $AK = BK$, то $AN = 2KM$.

**3.** (**Окружность Конвея**) На продолжении сторон $BA$ и $CA$ за точку $A$ отложим отрезки $AB_1$ и $AC_2$, равные стороне $BC$. Аналогично построим точки $B_2$ и $A_1$, $A_2$ и $C_1$. Докажите, что все построенные таким образом точки лежат на одной окружности.

**4.** Хорда $CD$ окружности с центром $O$ перпендикулярна ее диаметру $AB$, а хорда $AE$ делит пополам радиус $OC$. Докажите, что хорда $DE$ делит пополам хорду $BC$.

**5.** Обозначим точки касания вписанной и вневписанной окружностей со стороной $AC$ треугольника $ABC$ через $P$ и $Q$ соответственно. Докажите, что прямая $BQ$ проходит через точку диаметрально противоположную точке $P$ на вписанной окружности.

**6.** Две окружности пересекаются в точках $A$ и $B$. Через точку $A$ проведена прямая, вторично пересекающая первую окружность в точке $C$, а вторую – в точке $D$. Пусть $M$ и $N$ – середины дуг $BC$ и $BD$, не содержащих точку $A$, а $K$ – середина отрезка $CD$. Докажите, что угол $MKN$ прямой. (Можно считать, что точки $C$ и $D$ лежат по разные стороны от точки $A$.)

**7.** Пусть $H$ – ортоцентр остроугольного треугольника $ABC$. На сторонах $AB$ и $AC$ отметили точки $M$ и $N$ соответственно. Окружности с диаметрами $BN$ и $CM$ пересекаются в точках $P$ и $Q$. Доказать, что $P, Q$ и $H$ лежат на одной прямой.