Лексикографический порядок

группа 10-2
12.09.16

Определение. Рассмотрим две строки одинаковой длины, состоящие из натуральных чисел: $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, $B = (b_1, b_2, \dots, b_n)$. Будем говорить, что $A \succ B$ (или A **мажорирует** B), если: или $a_1 > b_1$; или $a_1 = b_1$ и $a_2 > b_2$; или $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$ и $a_3 > b_3$ и т.д.

Теорема. Докажите, что
(a) если $A \preceq B$, $B \preceq C$, то $A \preceq C$.
(b) строго убывающая последовательность строк длины n всегда конечна.
(c) в каждом непустом множестве строк длины n есть наименьший элемент.

Таким образом мы может упорядочить множество строк длины n. Такой порядок называется *лексикографическим.* Своё название лексикографический порядок получил по аналогии с сортировкой по алфавиту в словаре.

1. **(Старая задача)** В колоде часть карт лежит рубашкой вниз. Время от времени Петя вынимает из колоды пачку из одной или нескольких подряд идущих карт, в которой верхняя и нижняя карты лежат рубашкой вниз, переворачивает всю пачку как одно целое и вставляет её в то же место колоды (если «пачка» состоит лишь из одной карты, то требуется только, чтобы она лежала рубашкой вниз). Докажите, что в конце концов все карты лягут рубашкой вверх, как бы ни действовал Петя.

2. Компьютер сортирует массив из 100 натуральных чисел, стремясь выстроить элементы в порядке неубывания. Для этого он находит два любых элемента (возможно, несоседних), где левый больше правого, и меняет их местами. После чего вирус новый правый элемент умножает на 10. Докажите, что рано или поздно массив отсортируется.

3. Есть натуральное число $x > 1$. Каждую секунду Петя пишет вместо него число $y = x * (p-1)^k/p$, где p — какой-нибудь простой делитель числа x, а число k произвольно (и меняется от хода к ходу). Докажите, что рано или поздно у Пети получится 1.

4. Сформулируйте, что означает, что одна бесконечная вправо строка мажорирует другую. Какие из пунктов вышеупомянутой теоремы верны для бесконечных вправо строк?

5. Петя ставит точку с натуральными координатами, проводит из нее два луча вправо и вверх, и закрашивает внутренность угла и его стороны. Следующую точку с натуральными координатами он выбирает среди незакрашенных, и так же строит и закрашивает угол. Докажите, что через несколько операций все точки с натуральными координатами будут закрашены.

6. Двое играют в следующую игру. Есть последовательность из n крестиков и ноликов. За один ход разрешается взять любые k ($k = 1, \dots, n$) подряд идущих знака таких, что эта последовательность начинается с крестика, а все остальные знаки в ней - нолики(допускается последовательность из одного крестика), и инвертировать её (заменить крестик на нолик и нолики на крестики. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре (в зависимости от начальной позиции)?

7. Петя вырезал из бумаги 2016 различных прямоугольников с целыми сторонами, не превышающими 1000. Докажите, что среди них можно выбрать пять таких, что каждый следующий строго больше предыдущего.