Геометрия (по мотивам летних сборов)

группа 10-1
25.05.2017

1. Через вершины треугольника ABC проведены 6 чевиан, лежащих внутри треугольника и образующих с противоположными сторонами 6 равных острых углов. Докажите, что среди 12 точек пересечения этих отрезков найдутся 6, лежащих на одной окружности.

2. Различные точки B, B', C, C' лежат на прямой ℓ. A — точка вне прямой ℓ. Прямая, проходящая через B параллельно AB', пересекает AC в точке E, а прямая, проходящая через C параллельно AC', пересекает AB в точке F. Пусть X — точка пересечения описанных окружностей $\triangle ABC$ и $\triangle AB'C'$ ($A \neq X$). Докажите, что $EF \parallel AX$.

3. В треугольнике ABC угол A равен 60°. На стороне BC произвольно выбирается точка D. Точки O_B и O_C — центры описанных окружностей треугольников ABD и ACD, точка N — центр описанной окружности треугольника O_BO_CD. Прямые BO_B и CO_C пересекаются в точке M. Докажите, что прямые MN (при всевозможных положениях D) проходят через фиксированную точку.

4. На стороне BC треугольника ABC выбрана точка P. Произвольная секущая, проходящая через P, пересекает описанную окружность в M и N. Прямые AM и AN пересекают прямую BC в точках X и Y. Докажите, что описанная окружность треугольника AXY проходит через фиксированную (т. е. не зависящую от секущей) точку, отличную от A.

5. В треугольнике ABC проведена биссектриса BL. Окружность ω, проходящая через точку B и касающаяся стороны AC в точке L, пересекает стороны AB и BC в точках D и E соответственно. Отрезки AE и CD пересекают ω вторично в точках K и M, а лучи BK и BM пересекают AC в точках P и Q. Докажите, что $AC = 2PQ$.

6. Точка D лежит на стороне BC треугольника ABC. I, I_1 и I_2 — центры вписанных окружностей ABC, ABD и ACD соответственно. $M \neq A$ и $N \neq A$ — точки пересечения описанной окружности треугольника ABC с описанными окружностями треугольников IAI_1 и IAI_2 соответственно. Докажите, что прямая MN проходит через постоянную точку, не зависящую от выбора точки D.

7. Точки O и G — центр описанной окружности и точка пересечения медиан треугольника ABC. Точка K выбрана так, что $\angle KOG = 90^\circ$. Докажите, что $KA + KB + KC > OA + OB + OC$.

8. Пусть D — точка на стороне BC треугольника ABC. Окружность ω_1 касается отрезков AD и BD и описанной окружности треугольника ABC. Окружность ω_2 касается отрезков AD и CD и описанной окружности треугольника $\triangle ABC$. Пусть X и Y — точки касания окружностей ω_1 и ω_2 с BC соответственно, и M — середина XY. Пусть T — середина дуги BC, не содержащей точку A. Докажите, что если I — центр вписанной окружности треугольника $\triangle ABC$, то TM проходит через середину ID.