Вариации

Группа 10-1
15.05.2017

1. На отрезке AB отмечено $2n$ различных точек, симметричных относительно середины AB. При этом n из них покрашены в красный цвет, оставшиеся n — в синий. Докажите, что сумма расстояний от точки A до красных точек равна сумме расстояний от точки B до синих точек.

2. Сумма нескольких натуральных чисел равна 2017. Найдите максимально возможное их произведение.

3. В однокруговом турнире по теннису участвовало $2n+1$ человек: $p_1, p_2, \ldots, p_{2n+1}$ (каждый сыграл с каждым ровно один раз, ничьих не бывает). Пусть игрок p_i одержал w_i побед. Найдите максимум и минимум (в зависимости от n) величины $w_1^2 + w_2^2 + \ldots + w_{2n+1}^2$.

4. В таблице $n \times m$ расставлены действительные числа так, что сумма чисел в каждом столбце и каждой строке целая. Докажите, что каждое число в таблице можно заменить на его верхнюю или нижнюю целую часть так, чтобы сумма чисел в каждом столбце и каждой строке не изменилась.

5. Имеется три кучи камней. Сизиф таскает по одному камню из кучи в кучу. За каждое перетаскивание он получает от Зевса количество монет, равное разности числа камней в куче, в которую он кладет камень, и числа камней в куче, из которой он берет камень (сам перетаскиваемый камень при этом не учитывается). Если указанная разность отрицательна, то Сизиф возвращает Зевсу соответствующую сумму. (Если Сизиф не может расплатиться, то великодушный Зевс позволяет ему совершать перетаскивание в долг.) В некоторый момент оказалось, что все камни лежат в тех же кучах, в которых лежали первоначально. Каков наибольший суммарный заработок Сизифа на этот момент?

6. На прямой отмечены $2n$ различных точек, при этом n из них покрашены в красный цвет, остальные n — в синий. Докажите, что сумма попарных расстояний между точками одного цвета не превосходит суммы попарных расстояний между точками разного цвета.

7. Рассмотрим перестановку $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{20})$ чисел $1, 2, \ldots, 20$ (так как это перестановка, среди чисел $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{20}$ нет одинаковых). За один ход разрешается поменять два числа местами. Нашей целью является получить набор $(1, 2, \ldots, 20)$ из $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{20})$. Для перестановки $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{20})$ обозначим через $N(\sigma)$ минимальное число ходов, которые приводят к цели из перестановки σ. Найдите максимально возможное значение $N(\sigma)$.

8. *Хромой ладьёй* назовём ладью, которая за один ход может сдвинуться только на одну клетку. Хромая ладья за 64 хода обошла все клетки шахматной доски и вернулась на исходную клетку. Докажите, что число её ходов по горизонтали не равно числу ходов по вертикали.