Функциональные уравнения

группа 10-1
11.05.2017

1. Найдите все функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\forall\, x \in \mathbb{R}\ 2f(1-x) = 1 - xf(x)$.
2. Известно, что функция $f(f(x))$ всюду положительна, где $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Можно ли утверждать, что $f(x)$ всюду положительна?
3. Существует ли такая непрерывная функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, что $f(f(x))$ строго убывает?
4. Обязательно ли непрерывная функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, принимающая в иррациональных точках рациональные значения, постоянна?
5. Существуют ли периодические функции $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такие, что $f(x)+g(x) = x$ при всех $x \in \mathbb{R}$?
6. Найдите все $f\colon \mathbb{Q}_{>0} \to \mathbb{Q}_{>0}$, $\forall\, x \in \mathbb{Q}_{>0}$ удовлетворяющие $f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = 1$ и $f(1+2x) = \frac{f(x)}{2}$.
7. Непрерывная функция $f\colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$ такова, что $2f(f(x)) \leqslant f(x) + x$ при любом $x \in \mathbb{R}_{>0}$. Докажите, что найдется такое $x_0 > 0$, что $f(x) \leqslant x$ при всех $x > x_0$.
8. Докажите, что не существует $f(x)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, при всех $x \in \mathbb{R}$ удовлетворяющей $f(f(x)) = x^2 - 2$.

Функциональные уравнения

группа 10-1
11.05.2017

1. Найдите все функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\forall\, x \in \mathbb{R}\ 2f(1-x) = 1 - xf(x)$.
2. Известно, что функция $f(f(x))$ всюду положительна, где $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Можно ли утверждать, что $f(x)$ всюду положительна?
3. Существует ли такая непрерывная функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, что $f(f(x))$ строго убывает?
4. Обязательно ли непрерывная функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, принимающая в иррациональных точках рациональные значения, постоянна?
5. Существуют ли периодические функции $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такие, что $f(x)+g(x) = x$ при всех $x \in \mathbb{R}$?
6. Найдите все $f\colon \mathbb{Q}_{>0} \to \mathbb{Q}_{>0}$, $\forall\, x \in \mathbb{Q}_{>0}$ удовлетворяющие $f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = 1$ и $f(1+2x) = \frac{f(x)}{2}$.
7. Непрерывная функция $f\colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$ такова, что $2f(f(x)) \leqslant f(x) + x$ при любом $x \in \mathbb{R}_{>0}$. Докажите, что найдется такое $x_0 > 0$, что $f(x) \leqslant x$ при всех $x > x_0$.
8. Докажите, что не существует $f(x)\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, при всех $x \in \mathbb{R}$ удовлетворяющей $f(f(x)) = x^2 - 2$.