Тренировочная олимпиада

10 класс

20.04.2017

1. На столе стоят три пустых банки из-под мёда. Винни-Пух, Кролик и Пятачок по очереди кладут по одному ореху в одну из банок. Их порядковые номера до начала игры определяются жребием. При этом Винни может добавлять орех только в первую или вторую банку, Кролик — только во вторую или третью, а Пятачок — в первую или третью. Тот, после чьего хода в какой-нибудь банке оказалось ровно 2017 орехов, проигрывает. Докажите, что Винни Пух и Пятачок могут, договорившись, играть так, чтобы Кролик проиграл.

2. Пусть AA' — точка на одной из сторон трапеции $ABCD$ такая, что прямая AA' делит площадь трапеции пополам. Точки B', C', D' определяются аналогично. Докажите, что точки пересечения диагоналей четырехугольников $ABCD$ и $A'B'C'D'$ симметричны относительно середины средней линии трапеции $ABCD$.

3. Пусть многочлен $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$ имеет хотя бы один действительный корень и $a_0 \neq 0$. Докажите, что, последовательно вычеркивая в некотором порядке одночлены в записи $P(x)$, можно получить из него число a_0 так, чтобы каждый промежуточный многочлен также имел хотя бы один действительный корень.

4. На плоскости рассматривается конечное множество равных, параллельно расположенных квадратов, причем среди любых $k+1$ квадратов найдутся два пересекающихся. Докажите, что это множество можно разбить не более чем на $2k-1$ непустых подмножеств так, что в каждом подмножестве все квадраты будут иметь общую точку.

Тренировочная олимпиада

10 класс

20.04.2017

1. На столе стоят три пустых банки из-под мёда. Винни-Пух, Кролик и Пятачок по очереди кладут по одному ореху в одну из банок. Их порядковые номера до начала игры определяются жребием. При этом Винни может добавлять орех только в первую или вторую банку, Кролик — только во вторую или третью, а Пятачок — в первую или третью. Тот, после чьего хода в какой-нибудь банке оказалось ровно 2017 орехов, проигрывает. Докажите, что Винни Пух и Пятачок могут, договорившись, играть так, чтобы Кролик проиграл.

2. Пусть AA' — точка на одной из сторон трапеции $ABCD$ такая, что прямая AA' делит площадь трапеции пополам. Точки B', C', D' определяются аналогично. Докажите, что точки пересечения диагоналей четырехугольников $ABCD$ и $A'B'C'D'$ симметричны относительно середины средней линии трапеции $ABCD$.

3. Пусть многочлен $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$ имеет хотя бы один действительный корень и $a_0 \neq 0$. Докажите, что, последовательно вычеркивая в некотором порядке одночлены в записи $P(x)$, можно получить из него число a_0 так, чтобы каждый промежуточный многочлен также имел хотя бы один действительный корень.

4. На плоскости рассматривается конечное множество равных, параллельно расположенных квадратов, причем среди любых $k+1$ квадратов найдутся два пересекающихся. Докажите, что это множество можно разбить не более чем на $2k-1$ непустых подмножеств так, что в каждом подмножестве все квадраты будут иметь общую точку.